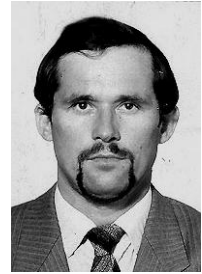


УДК 674.048

**Ю.А. Варфоломеев, Л.А. Баданина**

Варфоломеев Юрий Александрович родился в 1953 г., окончил в 1975 г. Архангельский лесотехнический институт, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой инженерных конструкций и архитектуры Архангельского государственного технического университета, заслуженный деятель науки РФ. Имеет около 300 научных трудов в области обеспечения долговечности древесины в строительстве экологически безопасными методами.



Баданина Лариса Александровна родилась в 1968 г., окончила в 1991 г. Ленинградский государственный университет, старший преподаватель кафедры высшей математики Архангельского государственного технического университета. Имеет 6 печатных работ в области математического моделирования процесса консервации древесины.



### **ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ СТРОЕНИЯ И СВОЙСТВ ДРЕВЕСИНЫ НА РАСЧЕТ ЕЕ ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТИ**

Для учета цилиндрической анизотропии древесины при определении фильтрации воздуха на основании закона Дарси разработаны математические модели в декартовых и полярных координатах. Установлено, что расчет проницаемости древесины хорошо пропитываемых пород (береза, осина) более точен в полярных координатах.

древесина, анизотропия, фильтрация, вакуумирование, декартовы и полярные координаты.

На первой стадии автоклавной пропитки древесины защитными препаратами по схеме вакуум–давление–вакуум создают разрежение величиной 0,05 ... 0,07 МПа [3] для освобождения полостей трахеид от воздуха. От эффективности выполнения такой важной технологической операции, как вакуумирование, во многом зависит скорость и качество пропитки изделий из древесины. Чаще всего исследования по влиянию вакуумирования на пропитку – это дорогостоящие и длительные испытания в лабораторных или производственных условиях [3].

При изучении проницаемости древесины жидкостями или газами многие исследователи [2, 4, 6] исходили из допущения, что древесина состоит из параллельных годичных слоев. Однако известно, что ей присуща цилиндрическая анизотропия свойств, обусловленная кольцевым строением, наличием ранних и поздних годичных слоев. Учет особенностей строения древесины при расчетах ее фильтрации необходим для получения точных результатов.

Цель настоящей работы – исследовать фильтрацию воздуха поперек волокон в радиальном направлении в деревянных элементах цилиндрической формы.

Теоретические исследования влияния кривизны годичных колец на фильтрацию воздуха в изделиях из древесины цилиндрической формы проводили, решая задачу с построением математической модели сначала в прямоугольных, а затем в цилиндрических координатах. В первом случае исходили из допущения, что при больших диаметрах ствола годичные слои параллельны (рис. 1, *a*). Во втором случае считали годичные кольца круговыми (рис. 1, *b*).

Рассмотрим технологическую операцию предварительного вакуумирования древесины [3]. Откачивая воздух, уменьшают его давление в герметичной автоклавной камере от 0,10 до 0,05 ... 0,07 МПа. Поскольку в начальный момент времени внутри образца воздух находится при атмосферном давлении, а на его поверхности – при меньшем, то происходит движение воздуха от внутренних слоев образца

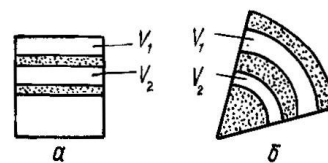


Рис. 1. Расположение слоев капиллярно-пористого тела: *a* – параллельные слои; *b* – кольцевидные слои, имеющие кривизну

к внешним. Необходимо описать движение воздуха в древесине при помощи уравнения фильтрации в капиллярно-пористом теле. Решением является функция давления  $P(x, t)$ , которая показывает величину давления воздуха на глубине (расстояние от поверхности образца)  $x$  в момент времени  $t$ .

Введем обозначения:  $P_{вн}$  – давление воздуха вне образца;  $P_0$  – начальное давление воздуха внутри образца;  $\rho_0$  – начальная плотность воздуха;  $k_{ф.в}$  – коэффициент фильтрации (воздухопроницаемость) воздуха;  $\mu_0$  – коэффициент пористости;  $a$  – радиус ствола.

#### Решение в прямоугольных координатах

Рассмотрим элементарный объем древесины, вырезанный перпендикулярно стволу, в системе прямоугольных координат  $(x, y)$  с центром на краю образца. Ось  $Ox$  направим поперек волокон (рис. 2). Поскольку в данном случае нас интересует только движение воздуха в поперечном направлении, то рассмотрим одномерную задачу фильтрации по координате  $x$ .

Согласно закону Дарси, одномерное уравнение фильтрации воздуха в древесном образце в прямоугольных координатах имеет вид

$$k \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1)$$

где

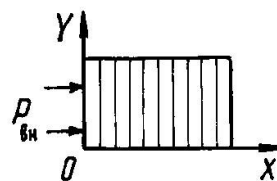


Рис. 2. Расположение декартовых координат относительно образца

$$k = \frac{k_{\text{д.а}} P_0}{\mu_0 \rho_0} . \quad (2)$$

Требуется найти функцию  $P(x, t)$  – удовлетворяющую уравнению (1). Сформулируем начально-краевые условия для искомой функции.

В автоклавной камере (с загруженными изделиями из древесины) создается вакуум 0,05 МПа. Поэтому считаем, что на поверхности образца при  $x = 0$  воздушное давление поддерживается постоянным ( $P_{\text{вн}} = 0,05$  МПа), т. е.

$$P(0, t) = P_{\text{вн}}; 0 < t < \infty. \quad (3)$$

На начальной стадии операции вакуумирования при  $t = 0$  воздух находится при атмосферном давлении ( $P_0 = 0,1$  МПа), т. е.

$$P(x, 0) = P_0; 0 < t < a. \quad (4)$$

Для удобства решения необходимо, чтобы граничное условие (3) было нулевым. Для этого вводится новая функция

$$P_1(x, t) = P(x, t) - P_{\text{вн}}. \quad (5)$$

При этом уравнение (1) не изменится, а условия (3), (4) примут следующий вид:

$$P_1(0, t) = 0; \quad (6)$$

$$P_1(x, 0) = P_0 - P_{\text{вн}}. \quad (7)$$

Согласно [7], решение  $P_1(x, t)$  будем искать в виде произведения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ :

$$P_1(x, t) = X(x)T(t). \quad (8)$$

Подставив (8) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$k \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}. \quad (9)$$

При разделении переменных левая и правая части постоянны. Приравняв их к постоянной  $\alpha$ , получим два дифференциальных уравнения:

$$k \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha; \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\alpha ,$$

решения которых имеют вид

$$X(x) = \tilde{C}_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}x\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}x\right); \quad T(t) = Ce^{-\alpha t} .$$

Таким образом, получено одно из решений

$$P_1(x, t) = C_1 e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right) + C_2 e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right). \quad (10)$$

Используя (6), найдем постоянную  $C_1 = 0$ . Проинтегрировав (10) по  $\alpha$  от 0 до  $+\infty$ , получим общее решение

$$P_1(x, t) = \int_0^{\infty} C_2(\alpha) \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right) \exp(-t\alpha) d\alpha, \quad (11)$$

где  $C_2(\alpha)$  находим из условия (7), разлагая правую часть в интеграл Фурье по синусам:

$$P_0 - P_{\text{аі}} = \frac{P_0 - P_{\text{аі}}}{\pi \sqrt{\alpha/k}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} y\right) dy \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right) d\alpha. \quad (12)$$

Таким образом,

$$C_2(\alpha) = \frac{P_0 - P_{\text{аі}}}{\pi \sqrt{\alpha/k}} \int_0^{\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} y\right) dy. \quad (13)$$

Следовательно,

$$P_1(x, t) = \frac{P_0 - P_{\text{аі}}}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha/k}} \int_0^{\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} y\right) dy \right) \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right) \exp(-t\alpha) d\alpha. \quad (14)$$

После вычисления двойного интеграла (14), используя функцию «ошибок»  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$ , получим решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (6) и (7):

$$P_1(x, t) = P_0 - P_{\text{аі}} \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{tk}}\right). \quad (15)$$

Учитывая (6) и (15), имеем окончательное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и (4):

$$P(x, t) = P_{\text{аі}} + P_0 - P_{\text{аі}} \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{tk}}\right). \quad (16)$$

Таким образом, установлена зависимость давления воздуха на глубине  $x$  в момент времени  $t$  без учета кривизны годовичных слоев.

#### Решение в полярных координатах

Рассмотрим поперечное сечение ствола в системе полярных координат, поместив полюс в центр круга (рис. 3). Из-за симметрии предложенной задачи внутреннее давление воздуха не зависит от угла  $\varphi$ . Аналогично предыдущему решению рассмотрим одномерный случай.

Уравнение фильтрации [5] для одномерной задачи в полярных координатах ( $r$ ,  $\varphi$ ) имеет вид

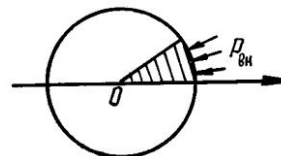


Рис. 3. Расположение полярных координат относительно образца

$$\frac{k}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (17)$$

где  $k$  – то же, что и в (2);

$P(r, t)$  – давление воздуха на расстоянии  $r$  от центра в момент времени  $t$ .

Требуется найти функцию  $P(r, t)$ . При этом начально-краевые условия останутся такими же, как и в случае прямоугольных координат: в начальный момент времени  $t = 0$  внутри образца воздух находится при атмосферном давлении, т.е.

$$P(r, 0) = P_0; \quad 0 \leq r < a. \quad (18)$$

На границе  $r = a$  в любой момент времени давление равно  $P_{\text{вн}}$ :

$$P(a, t) = P_{\text{вн}}. \quad (19)$$

Аналогично (5) вводится новая функция

$$P_2(r, t) = P(r, t) - P_{\text{вн}}, \quad (20)$$

которая удовлетворяет уравнению (17) и условиям

$$P_2(r, 0) = -P_{\text{вн}}; \quad (21)$$

$$P_2(a, t) = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (17) находится в виде

$$P_2(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{kt(\gamma_n)^2}{a^2}\right) J_0\left(\frac{r\gamma_n}{a}\right), \quad (23)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка;

$\gamma_n$  – нули функции  $J_0$ .

Какими бы ни были постоянные  $C_n$ , выражение (23) при  $t > 0$  удовлетворяет уравнению (17) и условию (22). Подставляя (23) в (21) и разлагая правую часть выражения (21) в ряд по функциям Бесселя, находим постоянные  $C_n$ :

$$C_n = \frac{2(P_0 - P_{\text{вн}})}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}. \quad (24)$$

Таким образом, получено решение

$$P(r, t) = P_{\text{вн}} + 2(P_0 - P_{\text{вн}}) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-kt\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right) \frac{J_0\left(\frac{r\gamma_n}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}. \quad (25)$$

Для сравнения решений (16) и (25) сделаем в (25) замену переменной  $r = a - x$  ( $x$  – расстояние от поверхности круглого образца). Тогда новое решение будет иметь следующий вид:

$$P(x, t) = P_{\text{вн}} + 2(P_0 - P_{\text{вн}}) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-kt\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right) \frac{J_0\left(\frac{(a-x)\gamma_n}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}. \quad (26)$$

При типовом режиме автоклавной пропитки древесины операция вакуумирования продолжается 20 ... 25 мин. С учетом этого, построим эпюры давлений при значении времени 20 мин. Примем следующие значения постоянных [1]:  $a = 13$  см,  $\rho_0 = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>,  $\mu = 0,6$ .

На рис. 4 показаны результаты решения задачи в декартовых и полярных координатах при одинаковых значениях постоянных.

В расчетах использован коэффициент воздухопроницаемости для древесины ели, относящейся к трудно пропитываемым породам [1]:

$$k_{\delta,a} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\bar{a}}{\bar{m} \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{P}_a}$$

Результаты (рис. 4, а) свидетельствуют о том, что оба решения практически совпадают. Например, при расчетах в декартовых координатах через 20 мин давление достигает 0,08 МПа на глубине 1,91 см, в полярных координатах – на 2,05 см (разница составляет 7 %).

Затем был рассмотрен вариант обработки древесины легко пропитываемых пород, коэффициент воздухопроницаемости которых в 8 раз больше

$$\text{предыдущего: } k_{\delta,a} = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\bar{a}}{\bar{m} \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{P}_a}$$

Из приведенных на рис. 4, б графиков видно, что решения в декартовых и полярных координатах значительно отличаются. При расчетах в декартовых координатах через 20 мин давление достигает 0,07 МПа на глубине 3,37 см, а в полярных координатах – на глубине 4,73 см (разница составляет 29 %).

Расхождение результатов можно объяснить именно тем, что при решении в полярных координатах учитывается цилиндрическое строение древесины и кривизна годичных слоев.

При течении жидкости или газа через древесину и хорошей фильтрации в направлении от внешних слоев к внутренним объемы слоев  $V_i$  ( $i = 1, 2 \dots$ ) уменьшаются (см. рис. 1), поскольку уменьшается радиус ствола. Жидкость (или газ) должна «перераспределиться», из-за чего уменьшается скорость пропитки. При фильтрации через пористое тело с такими же характеристиками, но имеющее параллельные слои, жидкость полойно перемещается, занимая все тот же объем  $V$ .

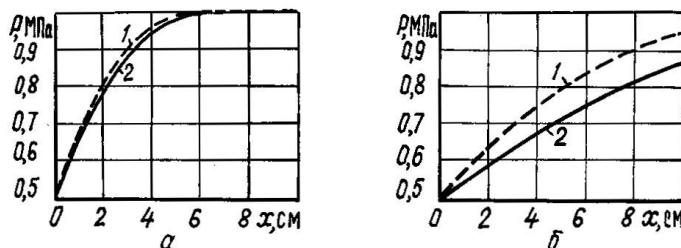


Рис. 4. Распределения давления воздуха в образце в радиальном направлении через 20 мин вакуумирования:

$$a - k_{\delta,a} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\bar{a}}{\bar{m} \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{P}_a}; \quad б - k_{\delta,a} = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\bar{a}}{\bar{m} \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{P}_a};$$

1 – решение в декартовых координатах; 2 – в полярных

*Выводы*

1. На основании закона Дарси разработаны математические модели фильтрации воздуха в древесине при расчете в декартовых и полярных координатах. Расчеты в полярных координатах позволяют более точно учесть цилиндрическую анизотропию строения и свойств древесины.

2. Для получения более точной картины проницаемости древесины легко пропитываемых пород (береза, осина) более корректно все расчеты производить в полярных координатах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровиков А.М., Уголев Б.Н.* Справочник по древесине / Под ред. Б.Н. Уголева. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 293 с.
2. *Калниньш А.Я.* Консервирование и защита лесоматериалов: Справочник. – М.: Лесн. пром-сть, 1971. – 424 с.
3. Новый отечественный завод для автоклавной пропитки древесины / Ю.А. Варфоломеев, Д.В. Агапов, В.И. Федотов, А.П. Хизов // *Деревообраб. пром-сть.* – 2001. – № 2. – С. 7–9.
4. *Оснач Н.А.* Проницаемость и проводимость древесины. – М.: Лесн. пром-сть, 1964. – 184 с.
5. *Прусов И.А.* Двумерные краевые задачи фильтрации. – Минск: Университетское изд-во, 1987. – 181 с.
6. *Серговский П.С., Расев А.И.* Гидродинамическая обработка и консервирование древесины. – М.: Лесн. пром-сть, 1987. – 359 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики: Учебное пособие для университетов. – 4-е изд., испр. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

Архангельский государственный  
технический университет

Поступила 01.10.02

*Yu.A. Varfolomeev, L.A. Badanina*

**Influence of Wood Structure and Properties' Anisotropy  
on its Air Permeability Calculation**

Mathematical models in Cartesian and polar coordinates have been developed for registration of cylinder wood anisotropy when determining air filtration based on Darcy law. It has been found out that calculation of wood permeability of tree species that easily undergo impregnation (birch, aspen) is more accurate in polar coordinates.