

уменьшению силы резания. При  $E_x/E_y = 1$  применимо решение для изотропного материала. В этом случае величина  $P$  более чем на 40 % больше по сравнению с анизотропным материалом. Поэтому использование модели изотропной среды для анализа процесса резания древесины не оправдано.

Силы резания, вычисленные на основании однопараметрического уравнения, вытекающего из условия наступления предельного состояния, оказываются завышенными более чем на 60 % по сравнению с фактическими. Это объясняется тем, что образование трещин происходит при внедрениях резца, значительно меньших, чем это принято в традиционном подходе при изучении процесса резания древесины.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. - Л.: Машиностроение, 1972. - 216 с. [2]. Ивановский Е.Г. Резание древесины. - М.: Лесн. пром-сть, 1975. - 200 с. [3]. Кортен Х.Т. Механика разрушения композитов / Под ред. Г. Либовиц. - М.: Мир, 1976. - Т. 7, ч. 1: Разрушение. - С. 367 - 471. [4]. Любченко В.И. Резание древесины и древесных материалов. - М.: Лесн. пром-сть, 1986. - 296 с. [5]. Михайлов А.М. Некоторые задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. - 1976. - № 5. - С. 128 - 133. [6]. Михайлов А.М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // ПМТФ. - 1969. - № 3. - С. 171 - 174. [7]. Партон В.В., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. - М.: Наука, 1974. - 416 с. [8]. Сенькевич Л.В. Совершенствование конструктивных параметров малоножевых торцово-конических фрез для фрезерного оборудования: Автор. дис. ... канд. техн. наук. - СПб., 1994. - 22 с.

Поступила 23 февраля 1996 г.

УДК 621.887

**Ю.Ф. ЧЕРНЫШЕВ**

Красноярский государственный технический университет

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООТНОШЕНИЙ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ

Решена задача определения главных напряжений в ортотропной втулке подшипника в общем и частном случае ее осесимметричного нагружения с учетом упругого потенциала материала стенок этой втулки. Установлены пределы применимости формул главных напряжений в стандартных

втулках поперечного, торцового гнущья и втулках контурного прессования в зависимости от процента отклонения от условий существования упругого потенциала в материале.

The task of determining the main stresses is solved in general for the orthotrope bushing of the bearing and in a particular case when it is loaded symmetrically to axle taking into account the restoring potential of walls materially of this bushing. The application limits for formulae of main stresses are set in the standard bushings of cross, faced bending and bushings of profile pressing depending on per cent deviation from the existence conditions of the material restoring potential.

При определении упругих характеристик древесины наблюдается значительное отклонение экспериментальных данных от трех обязательных условий для любого ортотропного материала, обладающего упругим потенциалом.

Известные древесиноведы Е.К. Ашкенази и Б.Н. Уголев считают причиной этих отклонений несовершенство рычажно-стрелочных тензомеров и электротензометрических проволочных датчиков сопротивления (влияние петель датчиков на результаты измерений деформаций), применяемых при определении упругих характеристик древесины [1, 8].

В работе исследуется влияние неточного определения упругих характеристик древесины на главные напряжения деревянной стандартной втулки, запрессованной в обойму подшипника.

В работе [2] А.Н. Митинский получил формулы для определения напряжений в тангенциальном  $\sigma_t$  и радиальном  $\sigma_r$  направлениях толстостенной ортотропной деревянной трубы при действии на нее внешнего  $P_1$  и внутреннего  $P_2$  давлений:

$$\sigma_t = \frac{E_t}{E_r} \left[ \frac{(P_2 r_2^{e_2-1} - P_1 r_1^{e_2-1})(1 + \mu_r e_1)}{(e_1 + \mu_r) (r_1^{e_1-1} r_2^{e_2-1} - r_2^{e_1-1} r_1^{e_2-1})} r^{e_1-1} - \frac{(P_2 r_1^{e_1-1} - P_1 r_2^{e_1-1})(1 + \mu_r e_2)}{(e_2 + \mu_r) (r_1^{e_1-1} r_2^{e_2-1} - r_2^{e_1-1} r_1^{e_2-1})} r^{e_2-1} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{(P_2 r_1^{e_2-1} - P_1 r_2^{e_2-1}) r^{e_2-1} - (P_2 r_1^{e_1-1} - P_1 r_2^{e_1-1}) r^{e_1-1}}{r_1^{e_1-1} r_2^{e_2-1} - r_2^{e_1-1} r_1^{e_2-1}} \quad (2)$$

Здесь  $E_t, E_r$  — модули упругости материала трубы в тангенциальном и радиальном направлениях;  
 $r_1, r_2$  — внешний и внутренний радиусы трубы;  
 $r$  — текущий радиус трубы;

$\mu_{rr}, \mu_{rt}$  – коэффициенты, характеризующие поперечную деформацию в направлении, определяемом первым индексом, от усилия, которое действует в направлении второго индекса;

$e_{1,2}$  – расчетная величина, определяемая по формуле

$$e_{1,2} = a \pm b; \quad a = \frac{\left(\frac{E_t}{E_r} \mu_{rr} - \mu_{rt}\right)}{2}; \quad b = \frac{\sqrt{\left(\mu_{rt} - \mu_{rr} \frac{E_t}{E_r}\right)^2 + 4 \frac{E_t}{E_r}}}{2}. \quad (3)$$

Преобразуем уравнения (1) и (2), введя следующие обозначения:

$$\rho = \frac{r}{r_1}; \quad C = \frac{r_2}{r_1}; \quad A = \frac{1 + \mu_{rr}(a+b)}{a+b+\mu_{rr}}; \quad B = \frac{1 + \mu_{rr}(a-b)}{a-b+\mu_{rr}}. \quad (4)$$

С их помощью получим

$$\sigma_t = \frac{E_t}{E_r} \frac{A(P_2 - P_1 C^{a-b-1}) \rho^{a+b-1}}{C^{a-b-1}(1 - C^{2b})}; \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{(P_2 - P_1 C^{a-b-1}) \rho^{a+b-1} - B(P_2 - P_1 C^{a+b-1}) \rho^{a-b-1}}{C^{a-b-1}(1 - C^{2b})}. \quad (6)$$

Здесь, однако, не использованы три условия, обязательные для любого ортотропного материала при осесимметричной нагрузке, обладающего упругим потенциалом [1]:

$$\frac{\mu_{ra}}{E_a} = \frac{\mu_{ar}}{E_r}; \quad (7a) \quad \frac{\mu_{ta}}{E_a} = \frac{\mu_{at}}{E_t}; \quad (7b) \quad \frac{\mu_{tr}}{E_r} = \frac{\mu_{rt}}{E_t}. \quad (7в)$$

Индексы  $a, t, r$  обозначают осевое, тангенциальное и радиальное направления в трубе.

Предположим, что эти направления совпадают с направлением осей симметрии трубы. Например, у деревянных втулок для подшипников скольжения поперечного и торцового гнущья, а также контурного прессования [11]. Согласно конструктивным особенностям, условие (7a) должно быть отнесено для втулки поперечного гнущья, (7b) – торцового гнущья, (7в) – контурного прессования.

Допустим наличие упругого потенциала у древесины и из (7в) выразим  $\mu_{rt} = \frac{E_t}{E_r} \mu_{tr}$ , которое подставим в (3). В результате этого

найдем  $a = 0, \quad b = \sqrt{\frac{E_t}{E_r}} = K.$

Величину  $K$  назовем коэффициентом анизотропии деревянной втулки. Используя (3) и  $\mu_n = \frac{E_t}{E_r} \mu_r$ , имеем

$$A = \frac{1 + \mu_r K}{K + \frac{E_t}{E_r} \mu_r}; \quad B = \frac{1 - \mu_r K}{-K + \frac{E_t}{E_r} \mu_r}.$$

Заменим  $\frac{E_t}{E_r} = K^2$  и проведем преобразования:

$$A = \frac{1}{K}, \quad B = -\frac{1}{K}.$$

После подстановки  $a$ ,  $b$ ,  $A$  и  $B$  в формулы (5) и (6) получим формулы для расчета напряжений для деревянной трубы:

$$\sigma_t = \frac{K \left[ (P_2 - P_1 C^{-(K+1)}) \rho^{K-1} + (P_2 - P_1 C^{K-1}) \rho^{-(K+1)} \right]}{C^{-(K+1)} (1 - C^{2K})}, \quad (8)$$

$$\sigma_r = \frac{(P_2 - P_1 C^{-(K+1)}) \rho^{K-1} - (P_2 - P_1 C^{K-1}) \rho^{-(K+1)}}{C^{-(K+1)} (1 - C^{2K})}. \quad (9)$$

Принятое допущение о наличии упругого потенциала в материале толстостенной деревянной втулки значительно упростило формулы для расчета главных напряжений (8), (9). При этом коэффициенты поперечной деформации вообще не использованы.

Как видно из (8) и (9), главные напряжения в основном зависят от коэффициента анизотропии втулки  $K$ , который в свою очередь обусловлен типом втулки (поперечное, торцовое гнутье и контурное пресование). Кроме того, эти напряжения зависят и от относительного геометрического размера втулки  $C$ .

Автор работы [3] эту же задачу решил аналогично известной задаче Ламе о напряжениях в изотропной толстостенной трубе [11] при использовании зависимости между компонентами напряжений и деформаций.

Полученные нами формулы напряжений (8) и (9) совпадают с формулами работы [3], но решение задачи в этой работе более трудоемкое по сравнению с предложенным нами.

Для исследования влияния упругого потенциала на напряженно-деформированное состояние деревянной втулки рассмотрим частный случай – нагружение втулки только внешним давлением ( $P_1 = p$ ,  $P_2 = 0$ ), который наиболее значим для расчета вкладышей подшипников скольжения.

После подстановки  $P_1 = p$ ,  $P_2 = 0$  в (5) и (6) найдем

$$\sigma_t = \frac{E_t BC^{a+b-1} \rho^{a-b-1} - AC^{a-b-1} \rho^{a+b-1}}{E_r C^{a-b-1} (1 - C^{2b})} p; \quad (10)$$

$$\sigma_r = \frac{C^{a+b-1} \rho^{a-b-1} - C^{a-b-1} \rho^{a+b-1}}{C^{a-b-1} (1 - C^{2b})} p. \quad (11)$$

Из числителей выражений (10) и (11) вынесем  $C^{a-b-1}$  и  $\rho^{a-b-1}$ . После преобразований получим

$$\sigma_t = \frac{E_t BC^{2b} - A\rho^{2b}}{E_r (1 - C^{2b})} \rho^{a-b-1} p; \quad (12)$$

$$\sigma_r = \frac{C^{2b} - \rho^{2b}}{(1 - C^{2b})} \rho^{a-b-1} p. \quad (13)$$

Аналогично преобразуем формулы (8) и (9):

$$\sigma_t = \frac{-K(C^{2k} + \rho^{2k}) \rho^{-(k+1)}}{1 - C^{2k}} p; \quad (14)$$

$$\sigma_r = \frac{C^{2k} - \rho^{2k}}{1 - C^{2k}} \rho^{-(k+1)} p. \quad (15)$$

Если упругие характеристики данного материала удовлетворяют уравнениям (7), то тангенциальные и радиальные напряжения, рассчитанные соответственно по (12, 13) и (14, 15), одинаковы.

В табл. 1 приведены для некоторых пород древесины упругие характеристики ( $E_a$ ,  $E_r$ ,  $E_t$ ,  $\mu_{ra}$ ,  $\mu_{ar}$ ,  $\mu_{ra}$ ,  $\mu_{ar}$ ,  $\mu_{rt}$ ,  $\mu_{tr}$ ), полученные российскими и зарубежными исследователями. Для этих характеристик проведено сопоставление левых и правых частей уравнений (7) и рассчитано отклонение между ними как их разность, отнесенная к большей величине. Из данных табл. 1 видно, что отклонение колеблется в широких пределах – от 0,09 до 85,3 %.

Нормативные документы, регламентирующие определение трех модулей упругости при растяжении и сжатии (ГОСТ 16483.24 – 73 – 16483.27 – 73) и шести коэффициентов поперечной деформации при сжатии (ГОСТ 1864.29 – 73), рекомендуют использовать рычажные тензометры. По нашему мнению применение этих приборов, имеющих недостатки, вносит существенный вклад в повышение отклонения (строки 3–5, 7, табл. 1).

ГОСТы 13594 – 68 и 21523.8 – 87 «Древесина прессованная. Методы определения показателей упругих деформаций» рекомендуют для определения деформаций применять электротензометрические (проволочные) датчики сопротивления, но и они имеют серьезные недостатки.

Таблица 1

## Сравнение левых и правых частей уравнений (7)

Порода древесины	Втулка поперечного гнущья		Втулка торцового гнущья		Втулка контурного прессования	
	Соотношение (7а)	Отклонение, %	Соотношение (7б)	Отклонение, %	Соотношение (7в)	Отклонение, %
Береза [10]	$\frac{0,580}{14,60} = \frac{0,043}{1,37}$	21,00	$\frac{0,450}{14,60} = \frac{0,040}{0,99}$	23,70	$\frac{0,580}{14,60} = \frac{0,043}{1,37}$	16,30
Береза [8]	$\frac{0,341}{20,37} = \frac{0,029}{1,19}$	31,60	$\frac{0,445}{20,37} = \frac{0,013}{0,64}$	6,90	$\frac{0,566}{1,19} = \frac{0,321}{0,64}$	5,10
Дуб [9]	$\frac{0,430}{14,60} = \frac{0,070}{1,87}$	42,30	$\frac{0,410}{14,60} = \frac{0,090}{0,99}$	69,10	$\frac{0,830}{1,37} = \frac{0,340}{0,99}$	43,30
Дуб [10]	$\frac{0,430}{16,40} = \frac{0,070}{0,68}$	74,50	$\frac{0,410}{16,40} = \frac{0,090}{0,53}$	85,30	$\frac{0,830}{0,68} = \frac{0,340}{0,53}$	47,40
Ель [10]	$\frac{0,440}{14,80} = \frac{0,017}{0,67}$	14,70	$\frac{0,411}{14,80} = \frac{0,031}{0,44}$	60,60	$\frac{0,480}{0,67} = \frac{0,250}{0,44}$	20,70
Ель ситхинская [6]	$\frac{0,372}{11,88} = \frac{0,029}{0,93}$	0,09	$\frac{0,467}{11,88} = \frac{0,020}{0,51}$	0,43	$\frac{0,435}{0,93} = \frac{0,240}{0,51}$	0,09
Сосна [10]	$\frac{0,490}{12,30} = \frac{0,030}{0,70}$	7,00	$\frac{0,410}{12,30} = \frac{0,037}{0,58}$	47,80	$\frac{0,790}{0,70} = \frac{0,380}{0,58}$	41,90
Сосна [8]	$\frac{0,504}{11,30} = \frac{0,078}{1,74}$	0,50	$\frac{0,463}{11,30} = \frac{0,045}{0,90}$	18,10	$\frac{0,527}{1,74} = \frac{0,306}{0,90}$	10,90
Лиственница сибирская [5]	$\frac{0,391}{20,00} = \frac{0,091}{1,87}$	59,80	$\frac{0,349}{20,00} = \frac{0,059}{1,14}$	66,30	$\frac{0,423}{1,87} = \frac{0,343}{1,14}$	24,80
Дугласия [6]	$\frac{0,292}{12,21} = \frac{0,020}{0,83}$	0,72	$\frac{0,449}{12,21} = \frac{0,022}{0,61}$	2,00	$\frac{0,390}{0,83} = \frac{0,287}{0,61}$	0,13

Примечание. Модули упругости приведены в ГПа.

Основной из них – значительное влияние петель датчиков на результаты измерений деформаций при небольших базах, что подтверждается сравнительно большим отклонением (строка 9, табл. 1).

Этих недостатков лишены беспетлевые фольговые датчики сопротивления [7] (строки 2, 6, 8, 10, табл. 1).

В работе [6] приведены упругие характеристики различных пород древесины, которые при подстановке в уравнение (7 в) дают нереально малые отклонения (0,046, 0,050, 0,07 % и др.).

Экспериментально определить упругие характеристики древесины так, чтобы они дали такое отклонение в уравнениях (7), нельзя, потому что существуют систематические ошибки вследствие кривизны годичных слоев, отклонения размеров образцов, неточности их ориентации, появления неупругих деформаций и др.

По-видимому в работе [6] одна из величин ( $\mu_r$  или  $\mu_{rr}$ ) была определена экспериментально, другая получена из соотношения (7в).

Таким образом, уравнения (7) можно применять для оценки достоверности экспериментально определенных характеристик упругости и их корректировки как в большую, так и в меньшую сторону.

Таблица 2

**Расчет напряжений без учета и с учетом упругого потенциала  
для втулок с  $C = 0,5$**

Текущая координата $\rho$	Напряжение, доли от $p$					
	тангенциальное			радиальное		
	(12)	(14)	Расхожде- ние, %	(12)	(14)	Расхожде- ние, %
Втулка поперечного гнутья (строка 2, табл. 1)						
0,5	0,894	0,943	5,50	0,000	0,000	0,00
0,6	0,993	1,020	2,70	0,151	0,157	3,97
0,7	1,420	1,440	1,41	0,299	0,307	2,68
0,8	2,100	2,100	0,00	0,480	0,488	1,70
0,9	3,04	3,010	1,00	0,709	0,715	0,80
1,0	4,240	4,160	1,90	1,000	1,000	0,00
Втулка торцового гнутья(строка 1, табл. 1)						
0,5	2,880	2,870	0,30	0,000	0,000	0,00
0,6	2,400	2,390	0,40	0,437	0,436	0,20
0,7	2,060	2,060	0,00	0,692	0,692	0,00
0,8	1,810	1,810	0,00	0,846	0,845	0,10
0,9	1,610	1,610	0,00	0,941	0,941	0,00
Втулка контурного прессования (строка 9, табл. 1)						
0,5	3,070	2,750	10,40	0,000	0,000	0,00
0,6	2,550	2,310	9,40	0,428	0,419	2,10
0,7	2,210	2,030	8,10	0,679	0,668	1,60
0,8	1,970	1,840	6,60	0,834	0,826	0,96
0,9	1,800	1,690	6,10	0,934	0,930	0,40
1,0	1,670	1,580	5,40	1,000	1,000	0,00

С использованием данных табл. 1 рассчитаны тангенциальные и радиальные напряжения на внутренних, внешних и промежуточных волокнах деревянных втулок поперечного и торцового гнутья и контурного прессования по формулам (12, 13) и (14, 15). При этом определено расхождение между напряжениями, которые рассчитаны по формулам без учета и с учетом упругого потенциала материала втулок, имеющих относительный геометрический размер  $C$ , равный 0,5, 0,6, 0,7 и 0,8.

Результаты расчета для втулок с  $C = 0,5$  приведены в табл. 2.

На основании этих расчетов построены графики, представленные на рис. 1, 2.

Из рис. 1 следует, что напряжения втулок торцового гнутья практически не зависят от коэффициентов поперечной деформации. При любых отклонениях от уравнений (7) напряжения в этих втулках

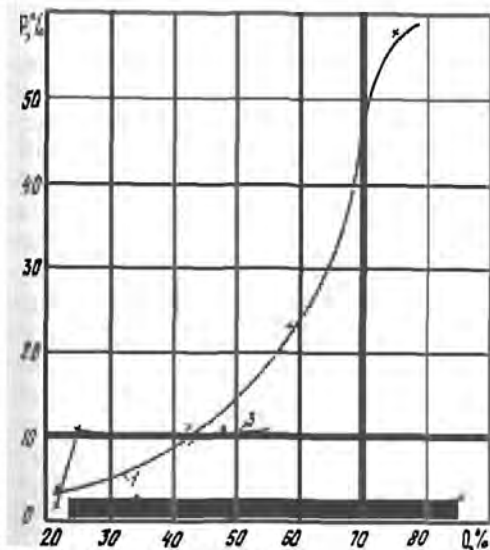


Рис. 1. Связь между расхождением  $P$  наибольших тангенциальных напряжений, определенных по (12) и (14), во втулках поперечного (1), торцового гнущья (2) и контурного прессования (3) и отклонением  $O$  материала втулок от условий существования упругого потенциала (по формулам (7))

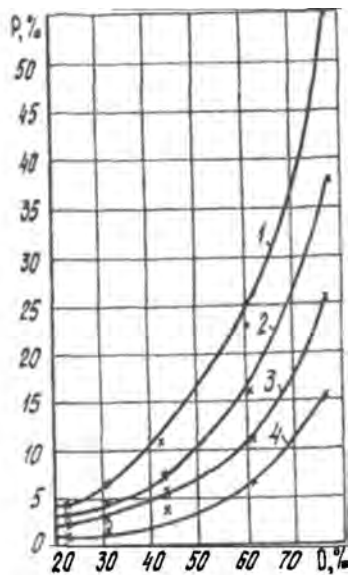


Рис. 2. Связь между расхождением  $P$  наибольших тангенциальных напряжений, определенных по (12) и (14), во втулках поперечного гнущья и  $O$  материала втулок от условий существования упругого потенциала (по формуле (7a)): 1 -  $C = 0,5$ ; 2 -  $0,6$ ; 3 -  $0,7$ ; 4 -  $0,8$

могут быть рассчитаны по (14, 15). Для втулок контурного прессования и поперечного гнущья используют формулы (14, 15) лишь при отклонении менее 25 и 30 % соответственно. Расчет главных напряжений в этих втулках по формулам (14, 15) дает слишком большие ошибки (особенно для втулок поперечного гнущья). Из представленных на рис. 2 графиков видно, что с увеличением  $C$  от 0,5 до 0,6, 0,7 и 0,8 тангенциальное напряжение убывает в 1,5, 2,0 и 3,6 раза. Подобное уменьшение как тангенциальных, так и радиальных напряжений наблюдается и для втулок контурного прессования и торцового гнущья.

### Выводы

Более простым способом решена задача определения главных напряжений в ортотропной втулке подшипника в общем и частном случае ее осесимметричного нагружения с учетом упругого потенциала материала стенок этой втулки.

Расчетом установлены пределы применения формул для определения главных напряжений в стандартных втулках поперечного и торцового гнущья и контурного прессования в зависимости от отклонения ее материала от условий существования упругого потенциала.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Ашкенази Е.К. Анизотропия древесины и древесных материалов. - М.: Лесн. пром-сть, 1978.- 224 с. [2]. Митинский А.Н. К вопросу об определении напряжений в деревянной сверленной трубе, подверженной действию внутреннего давления// Вестник инженеров и техников.- 1936.- № 5. - С. 19 - 21. [3]. Митинский А.Н. Напряжение в толстостенной анизотропной трубе под действием наружного и внутреннего давлений//Сб. науч. тр.- Л.: Изд-во ЛИИЖДТ, 1948.- Вып. 136.- С. 55-61. [4]. Перельгин Л.М. Древесиноведение.- М.: Гослесбумиздат, 1963.- 284 с. [5]. Поздняков А.А., Брюховецкая Т.М. Упругие постоянные древесины лиственницы сибирской // Лиственница. Т. III. - Красноярск: СибТИ, 1968.- 540 с. [6]. Справочное руководство по древесине/Пер. с англ. - М.: Лесн. пром-сть, 1979.- 544 с. [7]. Тензометрия в машиностроении. Справочное пособие.- М.: Машиностроение, 1975.- 288 с. [8]. Уголев Б.Н. Древесиноведение и лесное товароведение.- М.: Экология, 1991.- 255 с. [9]. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения.- М.: Лесн. пром-сть, 1975.- 384 с. [10]. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения.- М.: Лесн. пром-сть, 1986.- 365 с. [11]. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов.- М.: Наука, 1986.- 512 с. [12]. Хухрянский П.Н. Прессование древесины.- М.: Лесн. пром-сть, 1964.- 352 с.

---

Поступила 8 января 1997 г.