

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ, (ВОЗНИКАЮЩИХ ВСЛЕДСТВИЕ ПРОКОВКИ) НА ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПИЛ

Г. А. ЖОДЗИШСКИЙ

Аспирант

(Ленинградская лесотехническая академия)

Проковка диска пилы является необходимой операцией для обеспечения его устойчивости при пилении. В статье делается попытка выяснить влияние, оказываемое начальной проковкой на работу пильного диска, исследуются напряжения, возникающие вследствие проковки, и влияние этих напряжений на частоты свободных колебаний диска, выводятся характеристики для аналитической оценки величины проковки.

При решении задачи мы делали следующие допущения:

1. Пильный диск находится в условиях плоского осесимметричного напряженного состояния (полагаем, что после проковки диск сохраняет плоскую форму).

2. Рассматриваются только поперечные колебания точек диска (перпендикулярные плоскости диска).

3. Напряжения не превосходят предела упругости.

4. В прокованной области диск испытывает незначительные пластические деформации, а в непрокованной — деформации только упругие.

Решение поставленной перед нами задачи даст возможность ответить на вопрос о компенсирующем влиянии напряжений, возникающих вследствие начальной проковки, на напряжения, возникающие в пиле от ее неравномерного нагрева [1], и явится теоретической основой для рационального выбора технологии проковки.

Попутно в работе рассмотрены критические степени проковки, то есть такие, при которых пильный диск теряет устойчивую плоскую форму равновесия.

Численные примеры, приводимые в конце статьи, помогают уяснить, как следует применять полученные нами формулы для практических расчетов; они дают также возможность рассмотреть влияние начальной проковки на частоты собственных колебаний пильного диска для зонтичной и веерных форм.

Тема данной статьи не должна рассматриваться самостоятельно. Она является частью вопроса о влиянии начальных напряжений, возникающих вследствие проковки, неравномерного нагрева, а также центро-

бежных сил инерции на собственные частоты пыльных дисков. Последняя тема очень тесно связана с вопросом об устойчивости пыльных дисков, который в настоящее время разрабатывается на кафедре строительной механики Ленинградской лесотехнической академии под руководством проф. Л. Н. Тер-Мкртчяна.

Основные соотношения, определяющие частоты собственных колебаний пыльного диска под действием напряжений, возникающих вследствие начальной проковки

Исследуем свободные колебания пыльного диска толщиной h с внутренним радиусом a и внешним радиусом b (рис. 1).

В результате проковки центральной части пилы на расстоянии l от центра диска, по периметру проковки возникают значительные начальные напряжения, которые определяются пластической деформацией пыльного диска. В прокованной части будут иметь место остаточные деформации, которые для простоты будем считать осесимметричными. В непрокованной части пластические деформации отсутствуют, и вся эта область испытывает только упругие деформации. Напряжения будем считать осесимметричными.

Решая плоскую осесимметричную задачу при соответствующих граничных условиях для пыльного диска с прокованной внутренней областью, получим для компонент напряжений в полярной системе координат следующие выражения:

Для прокованной части пилы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E_s(a) \left[\xi_1 \left(\frac{\rho}{l}\right)^{n-1} + \xi_2 \left(\frac{\rho}{l}\right)^n + \xi_3 \left(\frac{\theta}{l}\right)^{-2} + \xi_4 \right] \\ \sigma_\theta &= E_s \varepsilon_s(a) \left[n \xi_1 \left(\frac{\rho}{l}\right)^{n-1} + (n+1) \xi_2 \left(\frac{\rho}{l}\right)^n - \xi_3 \left(\frac{\rho}{l}\right)^{-2} + \xi_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для непрокованной части пилы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E_s \varepsilon_s(a) \left[\xi_5 \left(\frac{\rho}{l}\right)^{-2} + \xi_6 \right] \\ \sigma_\theta &= E_s \varepsilon_s(a) \left[-\xi_5 \left(\frac{\rho}{l}\right)^{-2} + \xi_6 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где E — модуль упругости;

$\varepsilon_s(\rho)$ — величина, характеризующая степень проковки вдоль радиуса, связанная с относительной пластической деформацией простой зависимостью:

$$\varepsilon_s(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{h} \right). \quad (3)$$

Эта формула получается, если учесть постоянство объема при пластической деформации.

Формулы (1), (2), (3), (4) и (5) приведены здесь в конечном виде; подробный вывод этих формул имеется в работе Л. Н. Тер-Мкртчяна «Устойчивость круглых пил», выполненной на кафедре строительной механики Ленинградской лесотехнической академии.

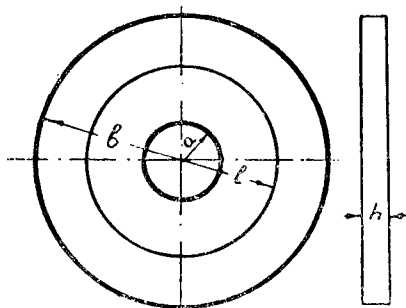


Рис. 1.

Коэффициенты ξ_i определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1 - VS}{(1 - S) S^{n-1} (n + 1)} \\ \xi_2 &= -\frac{VS_{n-1} - 1}{(1 - S) S^{n-1} (n + 2)} \\ \xi_3 &= -\frac{\Phi_2(c, S)}{(1 - S) S^{n-1}} \\ \xi_4 = \xi_6 &= \frac{\Phi_1(c, S)}{(1 - S) S^{n-1}} \\ \xi_5 &= -\frac{\Phi_3(c, S)}{(1 - S) S^{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{\varepsilon_S(l)}{\varepsilon_S(a)} \\ S &= \frac{a}{l} \\ c &= \frac{a}{b} \\ \Phi_1(c, S) &= c^2 [\Phi_0(v, S, 1) - \Phi_0(v, S, S)] \\ \Phi_2(c, S) &= \frac{c^2 \Phi_0(v, S, 1) - \Phi_0(v, S, S)}{1 - c^2} \\ \Phi_3(c, S) &= \frac{\Phi_0(v, S, 1) - \Phi_0(v, S, S)}{1 - c^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(v, S, 1) &= \frac{1 - \sqrt{S}^n}{n + 1} + \frac{\sqrt{S}^{n-1} - 1}{n + 2} \\ \Phi_0(v, S, S) &= + \frac{1 - \sqrt{S}^n}{n + 1} S^{n+1} + \frac{\sqrt{S}^{n-1} - 1}{n + 1} S^{n+2} \end{aligned}$$

При выводе формул для компонент напряжений закон распределения относительной пластической деформации был принят в виде:

$$\varepsilon_S = a_{n-1} \rho^{n-1} + a_n \rho^n \quad (6)$$

где a_{n-1} и a_n постоянные, определяемые из граничных условий для прокованной области, а показатель степени « n » выбирается с таким расчетом, чтобы эта формула наилучшим образом отвечала той пластической деформации, которая вызывается проковкой диска.

Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского, запишем уравнение свободных колебаний пильного диска, находящегося под действием напряжений, обусловленных проковкой, в следующей форме [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{Q} \int_0^Q \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ D \Delta \Delta W - h \left[\sigma_\rho \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \sigma_\theta \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\tau_{\rho, \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right\} \delta W \rho d\rho d\theta dt = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

где Ω — частота собственных колебаний пыльного диска;
 D — цилиндрическая жесткость;
 W — смещение точек диска в направлении, перпендикулярном плоскости диска;
 $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ — компоненты напряжений в пыльном диске, определяемые начальной проковкой диска;
 γ — удельный вес материала диска;
 g — ускорение свободного падения;
 ρ, θ — полярные координаты.

Так как напряжения в диске считаем осесимметричными, то компонент $\tau_{\rho,\theta}$ следует приравнять нулю.

$$\tau_{\rho,\theta} = 0.$$

Тогда (7) можно переписать следующим образом:

$$\frac{2\pi}{\Omega} \int_0^{2\pi} \int_0^b \left\{ D \Delta \Delta W - h \left[\sigma_\rho \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \tau_\theta \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right\} \delta W \rho d\rho d\theta dt = 0; \quad (8)$$

Ввиду исключительной трудности точного решения уравнения (8) для нахождения функции W , обращающей подынтегральное выражение тождественно в нуль, применим метод акад. Б. Г. Галеркина, позволяющий определить W , удовлетворяющее граничным условиям задачи и обращающее (8) в нуль.

Граничные условия задачи:

На закрепленном внутреннем контуре при $\rho = a$:

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \rho} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

На свободном внешнем контуре при $\rho = b$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\ (1 - \mu) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta W) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Главные формы колебаний выберем в виде:

$$W = a_0 (\rho - a)^2 \left(1 + B_1^{(1)} \frac{\rho}{b} + B_2^{(1)} \frac{\rho^2}{b^2} \right) \times \\ \times \sin(\lambda \theta + \theta_0) \sin(\Omega t + \alpha_0); \quad (10)$$

Выражение (10) автоматически удовлетворяет граничным условиям на внутреннем контуре, а постоянные $B_1^{(1)}$ и $B_2^{(1)}$ выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (9) [1].

Подставляя (10) в (8) и произведя интегрирование по t , получим после сокращения на общие множители:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ D\Delta\Delta W - h \left[\sigma_\rho \frac{c^2 W}{\rho^2} + \tau_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] - \frac{\gamma h}{g} \Omega^2 W \right\} \delta W \rho d\rho d\theta = 0, \quad (11)$$

где в данном случае под W следует понимать выражение (10), но без последнего множителя $\text{Sin}(\Omega t + \alpha_0)$.

Разобьем выражение (11) на сумму интегралов и введем соответственно следующие обозначения:

$$I_{1,1}^I = \int_a^b \int_0^{2\pi} D\Delta\Delta W \delta W \rho d\rho d\theta = \pi D b^2 f_{1,1}^I(c, \lambda) a'_0 \delta a'_0 \quad (12)$$

$$I_{1,1}^{II} = \int_a^b \int_0^{2\pi} h \tau_\rho \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \delta W \rho d\rho d\theta = \pi E \varepsilon_S(a) b^4 f_{1,1}^{IV}(c, S, \nu, \lambda) a'_0 \delta a'_0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{III} &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \sigma_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \delta W \rho d\rho d\theta = \\ &= \pi \varepsilon_S(a) E b^4 \left[f_{1,1}^{IV}(c, S, \nu, \lambda) - \lambda^2 f_{1,1}^X(c, S, \nu, \lambda) \right] a'_0 \delta a'_0; \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим:

$$f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda) = f_{1,1}^{VI}(c, S, \nu, \lambda) - \lambda^2 f_{1,1}^X(c, S, \nu, \lambda); \quad (15)$$

Тогда (14) переписывается в следующей форме:

$$I_{1,1}^{III} = \pi \varepsilon_S(a) b^4 E f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda) a'_0 \delta a'_0 \quad (16)$$

$$I_{1,1}^{XII} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma h}{g} \Omega^2 W \delta W \rho d\rho d\theta = \pi \frac{\gamma h}{g} \Omega^2 b^6 f_{1,1}^{XII}(c, \lambda) a'_0 \delta a'_0 \quad (17)$$

Используя все введенные выше обозначения, перепишем уравнение (11) в виде:

$$I_{1,1}^I - I_{1,1}^{II} - I_{1,1}^{III} - I_{1,1}^{XII} = 0. \quad (18)$$

Функции, входящие в выражения (12), (13), (16) и (17), находятся непосредственным интегрированием.

В конечном виде после некоторых преобразований эти функции могут быть записаны в следующем виде:

$$f_{1,1}^I(c, \lambda) = \sum_{i=-1}^7 C'_{i-2} \frac{1-c^{i-1}}{i-1} \quad (19)$$

$$f_{1,1}^{XII}(c, \lambda) = \sum_{i=2}^{10} K'_{i-3} \frac{1-c^i}{i} \quad (20)$$

$$f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) = \sum_{i=1}^7 E_i' \left\{ \left(\frac{c}{S} \right)^{i+1} \left[\xi_1 \frac{1-S^{n+1}}{n+i} + \xi_2 \frac{1-S^{n+i+1}}{n+i+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi_3 \frac{1-S^{i-1}}{i-1} + \xi_5 \frac{\left(\frac{S}{c} \right)^{i-1} - 1}{i-1} \right] + \xi_6 \frac{1-c^{i+1}}{i+1} \right\} \quad (21)$$

$$f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda) = \sum_{i=-1}^7 L_i' \left\{ \left(\frac{c}{S} \right)^{i+1} \left[\xi_1 n \frac{1-S^{n+i}}{n+i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi_2 (n+1) \frac{1-S^{n+i+1}}{n+i+1} - \xi_3 \frac{1-S^{i-1}}{i-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi_5 \frac{\left(\frac{S}{c} \right)^{i-1} - 1}{i-1} \right] + \xi_6 \frac{1-c^{i+1}}{i+1} \right\} \quad (22)$$

Коэффициенты C_i' , K_i' , E_i' и L_i' определяются по формулам, приводимым в табл. 1 соответственно. Следует заметить, что все эти коэффициенты встречались уже при вычислении влияния на частоту собственных колебаний пыльного диска температурных напряжений, обусловленных неравномерным нагревом [1]. В формулах (19), (21), (22) дроби, являющиеся сомножителями коэффициентов ξ_3 и ξ_5 при $i=1$, а также сомножитель коэффициента ξ_5 при $i=-1$, в формуле (22) обращаются в неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Эти неопределенности должны быть раскрыты по правилу Лопиталья.

В формуле (22) множитель при L_0' обращается в нуль, так как начальные напряжения от проковки, действующие по радиальному сечению диска, должны иметь главный вектор, равный нулю.

Подставляя в уравнение (18) значение интегралов (12), (13), (16) и (17) и производя сокращение общих множителей, имеем:

$$Df_{1,1}^I(c, \lambda) - E\varepsilon_s(a) b^2 [f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) + \\ + f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda)] - \Omega^2 \frac{\gamma h}{g} b^4 f_{1,1}^{XII}(c, \lambda) = 0; \quad (23)$$

Решая уравнение (23) относительно квадрата частоты собственных колебаний, получим:

$$\Omega^2 = \alpha_{1,1} \frac{f_{1,1}^I(c, \lambda)}{f_{1,1}^{XII}(c, \lambda)} - \varepsilon_s(a) \beta_{1,1} \frac{f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) + f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda)}{f_{1,1}^{XII}(c, \lambda)}; \quad (24)$$

где для краткости письма введены следующие обозначения:

$$\alpha_{1,1} = \frac{gEh^2}{12(1-\mu^2)\gamma b^4}; \quad (25)$$

$$\beta_{1,1} = \frac{Eg}{b^2\gamma}; \quad (26)$$

Из уравнения (24) при $i=0$ получим собственную частоту при зонтичной форме колебаний пыльного диска. При $i=1, 2, 3, \dots$ получим соответственно частоты первой, второй, третьей и т. д. веерных форм

Объединенные коэффициенты b_i	Коэффициенты c'_i	Коэффициенты K'_i
$b_1 = b^2 c^2$ $b_2 = c(-2 + B_1^{(\lambda)} c)$ $b_3 = 1 - 2B_1^{(\lambda)} c + B_2^{(\lambda)} c^2$ $b_4 = \frac{1}{b} (b_1^{(\lambda)} - 2b_2^{(\lambda)} c)$ $b_5 = \frac{1}{b^2} B_2^{(\lambda)}$	$C'_{-2} = b^2 (\lambda^4 - 4\lambda^2)$ $C'_{-1} = b_1 b_2 (2\lambda^4 \lambda^2 + 1)$ $C'_0 = 2b_1 b_3 (\lambda^4 - 4\lambda^2) + b_2^2 (\lambda^2 - 1)^2$ $C'_1 = b_1 b_4 (2\lambda^4 - 14\lambda^2 + 9) + b_2 b_3 (2\lambda^4 - 6\lambda^2 + 1)$ $C'_2 = b_1 b_5 (2\lambda^4 - 24\lambda^2 + 64) + b_2 b_4 (2\lambda^4 - 12\lambda^2 + 10) + b_3^2 (\lambda^4 - 4\lambda^2)$ $C'_3 = b_2 b_5 (2\lambda^4 - 22\lambda^2 + 65) + b_3 b_4 (2\lambda^4 - 14\lambda^2 + 9)$ $C'_4 = b_3 b_5 (2\lambda^4 - 24\lambda^2 + 64) + b_4^2 (\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9)$ $C'_5 = (2\lambda^4 - 30\lambda^2 + 73) b_1 b_5$ $C'_6 = (\lambda^4 - 20\lambda^2 + 64) b_5^2$	$K'_{-1} = b_1^2$ $K'_0 = 2b_1 b_2$ $K'_1 = 2b_1 b_2 + b_3^2$ $K'_2 = 2(b_1 b_4 + b_2 b_3)$ $K'_3 = 2b_1 b_5 + 2b_2 b_4 + b_3^2$ $K'_4 = 2(b_2 b_5 + b_3 b_4)$ $K'_5 = 2b_3 b_5 + b_4^2$ $K'_6 = 2b_4 b_5$ $K'_7 = b_5^2$
Коэффициенты L'_i	Коэффициенты E'_i	
$L'_1 = -\lambda^2 K'_{-1}$ $L'_0 = \left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right) K'_0$ $L'_1 = (1 - \lambda^2) K'_1$ $L'_2 = \left(\frac{3}{2} - \lambda^2\right) K'_2$ $L'_3 = (2 - \lambda^2) K'_3$ $L'_4 = \left(\frac{5}{2} - \lambda^2\right) K'_4$ $L'_5 = (3 - \lambda^2) K'_5$ $L'_6 = \left(\frac{7}{2} - \lambda^2\right) K'_6$ $L'_7 = (4 - \lambda^2) K'_7$	$E'_1 = 2b_1 b_3$ $E'_2 = 2(b_2 b_3 + 3b_1 b_4)$ $E'_3 = 2(b_3^2 + 3b_2 b_4 + 6b_1 b_5)$ $E'_4 = 4(2b_3 b_4 + 3b_2 b_5)$ $E'_5 = 14b_3 b_5 + 6b_4^2$ $E'_6 = 18b_4 b_5$ $E'_7 = 12b_5^2$	

колебаний пильного диска, с учетом влияния напряжений, обусловленных начальной проковкой диска.

При отсутствии проковки в формуле (24) остается только первый член, который в данном случае определяет частоту собственных колебаний пильного диска без учета всех факторов.

Формула (24) позволяет вычислить также весьма важную характеристику проковки пильных дисков — «критическую проковку», то есть такую проковку, при которой частота собственных колебаний обращается в нуль, что физически означает потерю устойчивости равновесия плоской формы диска.

Формула для критической степени проковки имеет вид:

$$[\varepsilon_s(a)]_{\text{кр}} = \frac{\left(\frac{h}{b}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{f_{1,1}^I(c, \lambda)}{f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) + f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda)} \quad (27)$$

Используя зависимость между относительной степенью проковки пилы и пластической деформацией, можем формулу (27) переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{\Delta h}{h}\right)_{\text{кр}} = \frac{\left(\frac{h}{b}\right)^2}{6(1-\mu^2)} \cdot \frac{f_{1,1}^I(c, \lambda)}{f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) + f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda)} \quad (28)$$

Типовой расчет влияния напряжений от начальной проковки на частоты свободных колебаний пильного диска

Для расчета был принят диск со следующими параметрами:

Наружный радиус	$b = 250 \text{ мм}$
Отношение внутреннего радиуса к наружному	$c = \frac{a}{b} = 0,2$
Толщина пилы	$h = 2 \text{ мм}$
Модуль упругости материала диска	$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$
Коэффициент Пуассона	$\mu = 0,3$
Удельный вес материала диска	$\gamma = 7,8 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$
Ускорение свободного падения	$g = 981 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$
Отношение внутреннего радиуса к радиусу прокованной области	$S = \frac{a}{l} = 0,3$
Степень проковки у внутреннего контура диска	$\varepsilon_s(a) = 1 \cdot 10^{-3}$
Показатель степени в функции распределения относительной пластической деформации вдоль радиуса	$n = 1$
Отношение проковки у наружного контура прокованной области к проковке у внутреннего контура	$\nu = 1$

Последовательность, которой следует придерживаться при выполнении расчета, следующая:

1. Из граничных условий (9) находятся коэффициенты $B_1^{(\lambda)}$ $B_2^{(\lambda)}$.
2. По формулам табл. 1 вычисляются значения объединенных коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .
3. Составляется таблица из попарных произведений объединенных коэффициентов.

4. По формулам табл. 1 вычисляются коэффициенты:

$$C'_i, E'_i, K'_i \text{ и } L'_i.$$

5. По формуле (19) находится функция $f_{1,1}^I(c, \lambda)$.

6. По формулам (21) и (22) вычисляются функции

$$f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda) \text{ и } f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda).$$

Между фигурными скобками, входящими в эти формулы, имеется соотношение

$$\begin{aligned} & -i \left\{ \left(\frac{c}{S} \right)^{i+1} \left[\xi_1 \frac{1-S^{n+1}}{n+i} + \xi_2 \frac{1-S^{n+i+1}}{n+i+1} + \xi_3 \frac{1-S^{i-1}}{i-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi_5 \frac{\left(\frac{S}{c} \right)^{i-1} - 1}{i-1} \right] + \xi_6 \frac{1-c^{i+1}}{i+1} \right\} = \left\{ \left(\frac{c}{S} \right)^{i+1} \left[\xi_1 \cdot n \frac{1-S^{n+i}}{n+i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi_2 (n+1) \frac{1-S^{n+i+1}}{n+i+1} - \xi_3 \frac{1-S^{i-1}}{i-1} - \xi_5 \frac{\left(\frac{S}{c} \right)^{i-1}}{i-1} \right] + \xi_6 \frac{1-c^{i+1}}{i+1} \right\}. \end{aligned}$$

значительно облегчающее расчет.

7. По формуле (20) вычисляется функция

$$f_{1,1}^{XII}(c, \lambda).$$

Значения вычисленных функций приведены в табл. 2.

Таблица 2

λ	$f_{1,1}^I(c, \lambda)$	$f_{1,1}^V(c, S, \nu, \lambda)$	$f_{1,1}^{VI, X}(c, S, \nu, \lambda)$	$f_{1,1}^{XII}(c, \lambda)$
0	0,2659	-0,00097	0,00804	0,00961
1	0,2563	-0,00134	0,00389	0,01053
2	0,5387	-0,00239	-0,01315	0,01261
3	2,1726	-0,00335	-0,03575	0,01332
4	5,5120	-0,00302	-0,07154	0,01053
5	8,8706	-0,00182	-0,07132	0,00642

8. По формуле (24) находятся собственные частоты колебаний пильного диска при различных формах колебаний (при зонтичной и первых трех верных формах). Расчеты по этой формуле производятся для каждого случая проковки. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

λ	$\left(\frac{\Delta h}{h} \right)_{\rho=a} = 0,2 \cdot 10^{-3}$		$\left(\frac{\Delta h}{h} \right)_{\rho=a} = 0,4 \cdot 10^{-3}$	
	$\Omega^2 \text{ сек}^{-2}$	$\Omega \text{ гц}$	$\Omega^2 \text{ сек}^{-2}$	$\Omega \text{ гц}$
0	35 610	30	5 908	12,5
1	47 660	34,8	37 890	31
2	150 246	61,7	199 800	71,5
3	533 640	116	682 640	131,5
4	1 501 100	195	1 767 300	212

Продолжение

λ	$\left(\frac{\Delta h}{h}\right)_{\rho=a} = 1,0 \cdot 10^{-3}$		$\left(\frac{\Delta h}{h}\right)_{\rho=a} = 2,0 \cdot 10^{-3}$	
	$\Omega^2 \text{ сек}^{-2}$	$\Omega \text{ гц}$	$\Omega^2 \text{ сек}^{-2}$	$\Omega \text{ гц}$
0	—	—	—	—
1	8 557	14,7	—	—
2	348 414	94,3	596 120	125
3	1 129 640	169	1 874 460	218
4	2 566 000	256	3 897 000	315

Данные табл. 2 позволяют найти частоты свободных колебаний пильного диска при различной относительной степени проковки (табл. 3). Для сравнения в табл. 4 приводим частоты непрокованного пильного диска.

Таблица 4

λ	0	1	2	3	4	5
$\Omega \text{ гц}$	40,7	38,2	50,5	98	172	288

Результаты проделанных вычислений иллюстрируются графиками рис. 2.

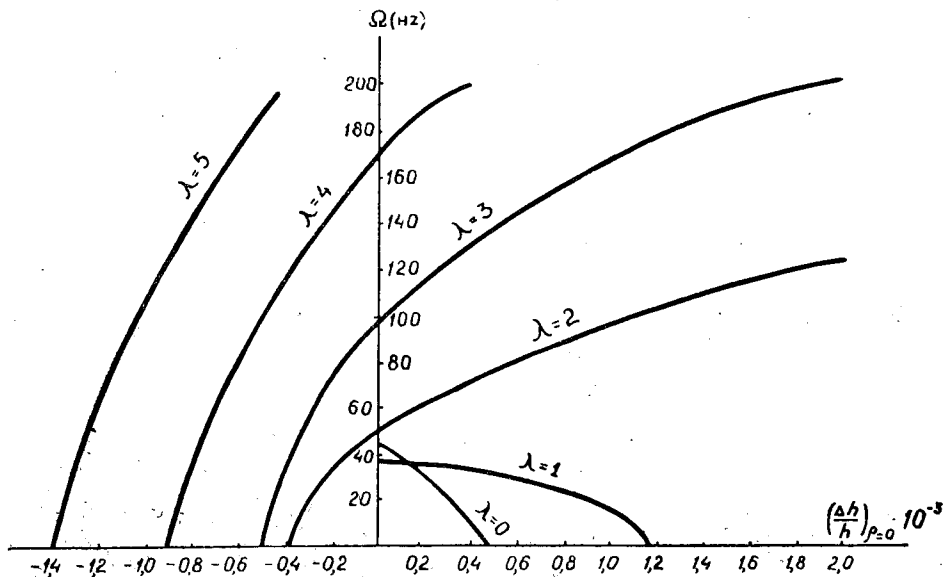


Рис. 2.

По формуле (28) находим критические степени проковки (табл. 5).

Таблица 5

λ	0	1	2	3	4	5
$\frac{\Delta h}{h} \cdot 10^{-3}$ $\rho = a$	0,44	1,17	-0,40	-0,52	-0,93	-1,42

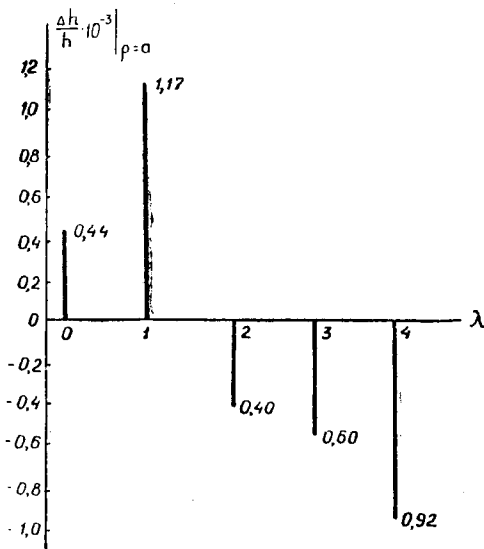


Рис. 3.

Значения критических степеней проковки для различных форм колебаний графически иллюстрируются рис. 3.

Анализ полученных результатов

Результаты проведенного расчета показывают, что влияние начальных напряжений, обусловленных проковкой, на частоты свободных колебаний пильного диска по своему характеру прямо противоположно действию напряжений, вызываемых неравномерным нагревом диска. Это явление справедливо для всех рассмотренных форм колебаний пильного диска.

Для зонтичной формы колебаний (колебания без узловых диаметров и узловых окружностей) проковка центральной части пилы приводит к общему уменьшению жесткости диска, что ведет к уменьшению частоты свободных колебаний.

При критической проковке, которая соответствует уменьшению толщины пильного диска

$$\Delta h = 2h \cdot \varepsilon_s(a)_{кр} = 0,88 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$$

происходит потеря устойчивости плоской формы равновесия.

Потеря устойчивости означает в данном случае, что жесткость диска стала равной нулю и приложением к его ободу бесконечно малого усилия можно вывести точки из плоскости диска. При отсутствии проковки формула (24) при $\lambda = 0$ дает частоту свободных колебаний равной $\Omega^{(0)} = 40,8 \text{ гц}$.

Собственная частота 1-ой веерной формы колебаний без учета напряжений от начальной проковки равна $\Omega^{(1)} = 33,6 \text{ гц}$. Это уменьшение частоты говорит о том, что зонтичную форму колебаний нельзя рассматривать, как низшую из веерных форм колебаний диска. Критическая степень проковки для 1-ой веерной формы (с одним узловым диаметром) равна 0,58, что соответствует уменьшению толщины диска на $2,32 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$.

Влияние напряжений, обусловленных проковкой, на частоты высших веерных форм колебаний совершенно иное.

Отрицательные значения критической степени проковки для этих форм колебаний говорят о том, что никакой проковкой не нарушается устойчивость плоской формы равновесия пильного диска. Значения частот свободных колебаний без учета проковки для второй и третьей веерных форм соответственно равны $\Omega^{(2)} = 50,5$ гц и $\Omega^{(3)} = 117$ гц. От проковки значения собственных частот для этих форм увеличиваются.

Сравнивая результаты этой и другой нашей работы [1], приходим к выводу, что ввиду различного влияния на частоту проковка диска и его нагрев при пилении должны компенсировать друг друга. Исследованию этого компенсирующего влияния будет посвящена особая статья.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Г. А. Жодзишский. Влияние неравномерного нагрева на частоты собственных колебаний пильных дисков постоянной толщины. «Труды ЛТА», вып. № 82, ч. II, Л., 1957.

Поступила в редакцию
12 октября 1957 г.