В.И. Малыгин, В.А. Стенин

Филиал «Севмашвтуз» С.-Петербургского государственного морского технического университета

Стенин Валерий Александрович родился в 1941 г., окончил в 1963 г. Архангельский лесотехнический институт, доктор технических наук, профессор филиала СПбМТУ «Севмашвтуз». Имеет около 150 печатных работ в области энергосбережения.
E-mail: rector@sevmashvtuz.edu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ РЕЗАНИИ ДРЕВЕСИНЫ

Предложен способ решения задачи нестационарной теплопроводности численным методом. Проведено моделирование процесса теплопроводности с граничными условиями первого рода.

Ключевые слова: режущий элемент, краевая задача, нестационарная теплопроводность, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод пременных состояний, дифференциальное уравнение.

Необходимость исследования теплофизики процесса резания древесины обусловлена высочайшими требованиями к качеству производимой продукции и вытекающими отсюда требованиями к элементам деревообрабатывающих технологических систем, прежде всего к режущему инструменту. Если в машиностроении точность сборных фрез по радиальному биению двух диаметрально расположенных зубьев режущих элементов в пределах 0,03 мм считается уровнем, то для дереворежущих фрез требуется микронная точность. Кроме того, специфика обработки древесины заключается в малой теплопроводности этого материала и концентрации практически всей образующейся при резании теплоты (за исключением конвекционных потоков) в режущем инструмент. В связи с этим актуальность учета тепловых деформаций с точки зрения потери точности инструмента в процессе резания не вызывает сомнений. Особенно важно это на этапе выбора конструкторского решения сборных инструментов, где вариативность возможных способов крепления режущего ножа достаточно высока, а выбор вариантов решений в рамках одного способа еще выше. В целом набор таких решений может достигать нескольких десятков.

Тепловые источники при резании древесины возникают как результат перехода в теплоту энергии деформации обрабатываемого материала и работы трения на поверхностях контакта древесины, стружки и режущего инструмента. Источниками отрицательной интенсивности (стоками), при воздействии которых теплота отводится от режущего инструмента, могут быть теплопроводность от лезвия к корпусу режущего инструмента, тепловое излучение, передача тепла в стружку и обрабатываемую деталь, конвективный теплообмен. Для открытых процессов резания, в частности при пилении древесины, с достаточной степенью точности все источники теплоты можно рассматривать как плоские, а определяющим процессом отвода теплоты считать теплопроводность [2].

Для решения краевых задач нестационарной теплопроводности используют в основном численные методы, из которых наибольшее применение (в силу своей универсальности) получили методы конечных разностей и конечных элементов. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, причем их реализация требует своего, как правило, сложного и дорогостоящего математического обеспечения [1].

В связи с этим представляет интерес объединение методов решения задач нестационарного теплообмена на основе использования общего математического подхода в доступной для инженерных расчетов форме – теория пространства состояний (ТПС).

Рассмотрим объединяющие особенности численных методов при расчете нестационарной теплопроводности. Применение метода прямых основано на замене производных по всем переменным, кроме одной (например, времени), конечными разностями. Это приведет к системе дифференциальных уравнений (в общем случае нелинейных), для численного решения которой можно использовать методы Рунге – Кутта, Адамса и др. Методы конечных разностей и конечных элементов также позволяют привести нестационарное уравнение теплопроводности вида (в частности, для одномерной задачи)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x,0) = 0; \quad 0 < x < s;$$

$$u(0,t) = \varphi(t); \quad u(s,t) = \varphi(t)$$

к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

В качестве общего математического подхода в этом случае может быть принят метод переменных состояний (МПС), основанный на теории матричного исчисления и векторном анализе. Для системы, описываемой совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений, пространство состояний может быть представлено следующими зависимостями [5]:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A(t)u(t) + B(t)z(t); \\ y(t) &= C(t)u(t) + D(t)z(t), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $A(t)$ – основная матрица состояния системы;

$u(t)$ – вектор переменных состояний объекта;

$B(t)$ – матрица задания граничных условий;

$z(t)$ – вектор управляющих воздействий;

$y(t)$ – вектор выходных переменных;

$C(t)$ – матрица связи переменных состояний с выходом системы;

$D(t)$ – матрица задания начальных условий.

В методе прямых с конечно-разностной аппроксимацией для задачи (1) разобьем интервал $0 \le x \le s$ узлами x_i с шагом h. По формуле численного дифференцирования для внутренних линий $1 \le i \le n-1$ получим систему уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = mu_{i-1} - 2mu_i + mu_{i+1}; \quad 1 \le i \le n-1, \qquad (3)$$

которая может быть представлена уравнениями состояния (2), когда учитываются следующие граничные условия первого рода (симметричная задача):

$$A(t) = \begin{bmatrix} -2m & m & \dots & 0 \\ m & -2m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2m \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ 0 \\ \dots \\ \varphi(t) \end{bmatrix}; \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$D(t) = [0]; \quad z(t) = [1],$$

где $m = \dfrac{\lambda}{c\rho\delta^2}$;

λ, c, ρ, δ – соответственно теплопроводность, теплоемкость, плотность, толщина слоя модели;

$\varphi(t)$ – температура на поверхности стенки, изменяющаяся во время испытаний;

$u(t)$ – температура текущего слоя модели;

$y(t)$ – температура центрального слоя модели.

Использование предлагаемого подхода для конечно-элементного способа расчета можно показать на примере полудискретного метода Галеркина [6]. Применив этот метод, преобразуем уравнение (1):

$$\frac{1}{6}\frac{du_{i-1}}{dt} + \frac{2}{3}\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{6}\frac{du_{i+1}}{dt} = mu_{i-1} - 2mu_i + mu_{i+1}; \quad 1 \le i \le n-1. \qquad (4)$$

Запишем уравнения состояния для системы (4):

$$N\dot{u}(t) = A(t)u(t) + B(t)z(t);$$
$$y(t) = C(t)u(t) + D(t)z(t);$$

где $N = \begin{bmatrix} 0{,}666 & 0{,}166 & \dots & 0 \\ 0{,}166 & 0{,}666 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0{,}666 \end{bmatrix}$.

Сопоставление метода МПС с точным аналитическим решением [4] показало, что при Fo > 1,5 погрешность вычислений не превышает 1%. Оценка численных свойств позволила установить аппроксимируемость, сходимость и устойчивость схем дискретизации МПС. При использовании граничных условий второго рода матрица для них имеет следующий вид:

$$B(t) = \left[\frac{q(t)}{c\rho\delta} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{q(t)}{c\rho\delta} \right].$$

Результаты исследований хорошо согласуются с данными работы [3], где предложена математическая модель первого рода для обратной задачи теплопроводности, основанная на математическом описании фильтра Калмана.

Выводы

1. Рассмотрен подход к решению задач нестационарной теплопроводности численным методом, базирующимся на теории пространства состояний (ТПС).

2. Методом ТПС проведено моделирование процесса теплопроводности с граничными условиями первого рода, показавшее сходимость и устойчивость схем дискретизации.

3. Метод ТПС может быть использован для решения задачи выбора конструкции дереворежущего инструмента на стадии его проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боглаев, Ю.П.* Вычислительная математика и программирование [Текст] / Ю.П. Боглаев. – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.

2. *Зотов, Г.А*. Повышение стойкости дереворежушего инструмента [Текст] / Г.А. Зотов, Е.А. Памфилов. – М.: Экология, 1991. – 384 с.

3. *Коздоба, Л.А.* Методы решения обратных задач теплопереноса [Текст] / Л.А. Коздоба, П.Г. Круковский. – К.: Наук. думка, 1982. – 360 с.

4. *Лыков, А.В*. Теория теплопроводности [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.

5. *Сигорский, В.П.* Математический аппарат инженера [Текст] / В.П. Сигорский. – К.: Техника, 1975. – 768 с.

6. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена [Текст] / Ши Д. – М.: Мир, 1988. – 544 с.

Поступила 15.11.07

V.I. Malygin, V.A. Stenin
«Sevmashvtuz», Branch of Saint-Petersburg State Marine Technical University

Mathematic Simulation of Heat Conductivity in Wood Cutting

The method of solving problem of unsteady heat conductivity by numerical method is proposed. The simulation of the heat conductivity process with first-order boundary conditions is carried out.

Keywords: cutting element, boundary problem, unsteady heat conductivity, method of finite differences, differential equation.