

УДК 625.572.001

СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕСУЩЕГО КАНАТА

И. И. СЛЕПКО

Хмельницкий технологический институт

Исследованию поперечных колебаний несущих канатов посвящены работы [1, 2, 4, 6—9], в которых последний рассматривается как гибкая нить или как стержень.

Нами рассмотрены собственные поперечные колебания несущего каната однопролетной подвесной установки, как предварительно деформированного растянутого стержня с малой стрелкой провеса, в предположении, что натяжение каната $T = \text{const}$ и его собственный вес не вызывают напряжений изгиба в поперечных сечениях, т. е. в начальный момент канат работает как абсолютно гибкая нить.

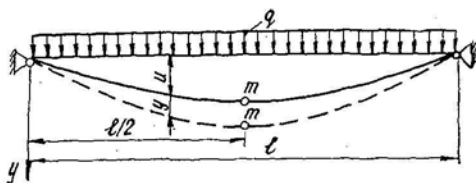


Рис. 1. Схема провисания каната

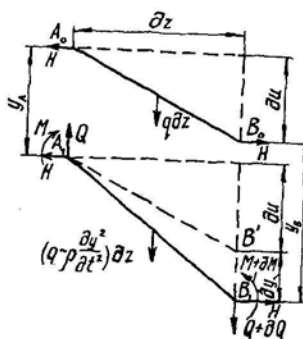


Рис. 2

Отсюда следует, что в начальный момент при $m = 0$ канат провисает по параболе (рис. 1), уравнение которой имеет вид:

$$u = \frac{q}{2H} (l - z) z, \quad (1)$$

где q — вес 1 пог. м каната;

l — длина пролета;

z — координата сечения;

H — горизонтальная составляющая натяжения каната и при расположении опор на одном уровне $H = T$.

При дополнительном нагружении каната в его сечениях возникает изгибающий момент и поперечная сила, а для каната с закрепленными концами, кроме этого, еще дополнительная осевая сила.

Вырежем из каната отрезок бесконечно малой длины, проекция которого на горизонтальную ось равна dz (рис. 2).

Запишем уравнения равновесия отрезка

$$M + Q dz - H(\partial u + \partial y) - \left(q - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{(\partial z)^2}{2} - M - \partial M = 0; \quad (2a)$$

$$\left(q - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dz + Q + \partial Q - Q = 0, \quad (2б)$$

где ρ — масса единицы длины каната;
 M и Q — изгибающий момент и поперечная сила в сечении каната.
 Пренебрегая величиной ∂z^2 , из уравнения (2а) получим:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial z} + H \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Из уравнения (2б)

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -q + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Продифференцируем по z уравнение (3)

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right). \quad (5)$$

На основании (4) и (5) с учетом $H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -q$ и $M = -B \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, где B — коэффициент изгибной жесткости каната, получим уравнение свободных поперечных колебаний несущего каната как предварительно деформированного стержня:

$$y^{IV} + \frac{\rho}{B} \ddot{y} - \frac{H}{B} y'' = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) F_k(t). \quad (7)$$

Подставив частный интеграл (7) в (6) и разделив на $y_k(z) F_k(t)$, получим уравнение главных форм колебаний несущего каната как предварительно деформированного стержня:

$$y_k^{IV}(z) - \xi^2 y_k''(z) - S_k^4 y_k(z) = 0, \quad (8)$$

где
$$\xi^2 = \frac{H}{B}; \quad S_k^4 = \frac{\rho \omega_k^2}{B};$$

$$\omega_k = - \frac{\ddot{F}_k(t)}{F_k(t)}. \quad (8a)$$

Интегрируя уравнение (8), находим:

$$y_k(z) = A_1 \operatorname{ch} \alpha_k z + B_1 \operatorname{sh} \alpha_k z + C \cos \beta_k z + D \sin \beta_k z, \quad (9)$$

где
$$\alpha_k = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4S_k^4}{\xi^4}}}; \quad \beta_k = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4S_k^4}{\xi^4}} - 1}.$$

Для определения постоянных интегрирования A_1, B_1, C, D используем метод начальных параметров.

Для шарнирного закрепления концов несущего каната (рис. 1) при $z = 0$ имеем

$$y_k(0) = 0; \quad y_k'(0) = \Theta_k(0); \quad y_k''(0) = 0; \quad y_k'''(0) = - \frac{Q_k(0)}{B}. \quad (10)$$

Дифференцируя последовательно выражение (9) и используя начальные условия (10), получим выражения для определения постоянных интегрирования. Подставим их в (9), тогда:

$$y_k(z) = \Theta_k(0) y_{2k}(z) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k}(z), \quad (11)$$

где

$$y_{2k}(z) = \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left(\frac{\beta_k^2}{\alpha_k} \operatorname{sh} \alpha_k z + \frac{\alpha_k^2}{\beta_k} \sin \beta_k z \right);$$

$$y_{4k}(z) = \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left(\frac{1}{\alpha_k} \operatorname{sh} \alpha_k z - \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k z \right). \quad (11a)$$

Для определения частоты и главных форм колебаний несущего каната используем граничные условия при $z = l$: $y_k(l) = 0$; $M_k(l) = 0$.

Взяв вторую производную от выражения (11), с учетом граничных условий получим:

$$\Theta_k(0) y_{2k}(l) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k}(l) = 0;$$

$$\Theta_k(0) y_{2k}''(l) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k}''(l) = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (12) однородная. Определитель ее

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{2k}(l) & -y_{4k}(l) \\ y_{2k}''(l) & -y_{4k}''(l) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Подставим функции $y_{2k}(l)$ и $y_{4k}(l)$ в выражение (13), откуда

$$\operatorname{sh} \alpha_k l \sin \beta_k l = 0. \quad (14)$$

Поскольку $\operatorname{sh} \alpha_k l \neq 0$, то $\sin \beta_k l = 0$ и $\beta_k l = k\pi$.

Учитывая (8a), получим выражение для определения k -й частоты собственных колебаний несущего каната, как предварительно деформированного растянутого стержня:

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{\rho} \left(1 + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{B}{H} \right)}. \quad (15)$$

Если в выражении (15) принять $B = 0$, т. е. рассматривать канат как абсолютно гибкую нить, то оно примет вид формулы для частоты собственных колебаний струны.

Из выражения (15) следует, что k -я частота собственных колебаний несущего каната (как абсолютно гибкой нити) и струны равны между собой при прочих равных условиях. Увеличение изгибной жесткости несущего каната приводит к возрастанию частоты его собственных колебаний.

Относительное приращение k -й частоты собственных колебаний несущего каната за счет его изгибной жесткости.

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{B}{H} \cdot 100 \%. \quad (15a)$$

Для несущего каната 25,5 ГЛ-В-Н 1568 ГОСТ 3077—80 при $H = 98,1$ кН, $B = 0,1177$ кН·м², $l = 300$ м получено, что частота первого тона собственных колебаний каната $\omega_1 = 2,177$ с⁻¹.

Главные формы определим с помощью формул (11) и (12)

$$y_k(z) = \frac{\Theta_k(0)}{y_{4k}(l)} (y_{4k}(l) y_{2k}(z) - y_{2k}(l) y_{4k}(z)). \quad (16)$$

После преобразований, учитывая (11a), получим:

$$y_k(z) = C_1 \sin \beta_k z = C_1 \sin \frac{k\pi}{l} z, \quad (17)$$

где C_1 — постоянная.

Из выражения (17) следует, что главные формы колебаний несущих канатов соответствуют главным формам колебаний струны.

Используя выражение (8а), имеем:

$$\ddot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = 0; \quad (18)$$

его интеграл

$$F_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что канат совершает гармонические колебания с частотой ω_k .

На основании (7), (17) и (19) получим

$$y_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_1 \sin \frac{k\pi z}{l} (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t). \quad (20)$$

Рассмотрим собственные колебания несущего каната с дополнительной сосредоточенной массой m (рис. 1), расположенной посередине пролета, поскольку такому положению груза соответствует максимальное натяжение каната. Сила тяжести груза P вызывает дополнительное натяжение каната, поскольку несущий канат жестко закреплен по концам.

Конечное статическое натяжение каната T_1 можно определить из кубического уравнения [3]

$$T_1^3 - T_1^2 \left(T_0 - \frac{Aq^2 l^2}{24T_0^2} \right) - \frac{A}{8} \left(\frac{q^2 l^2}{3} + P(P + ql) \right) = 0, \quad (21)$$

где T_0 — монтажное натяжение каната;

A — коэффициент продольной жесткости каната.

На канат в месте расположения массы действует сила инерции, изменяющаяся по закону:

$$\dot{I}_{mk}(t) = I_{mk}^* (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t), \quad (22)$$

где I_{mk}^* — амплитуда инерционной силы,

$$I_{mk}^* = m\omega_k^2 y_k \left(\frac{l}{2} \right); \quad (22a)$$

$y_k \left(\frac{l}{2} \right)$ — амплитуда прогиба посередине пролета.

Предполагая в первом приближении, что сила P влияет только на статическое натяжение каната и не влияет на частоту собственных колебаний при постоянном натяжении каната, на основании (11) найдем главные формы колебаний каната

$$y_k(z) = \Theta_k(0) y_{2k}(z) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k}(z) - \frac{I_{mk}^*}{B} y_{4k} \left(z - \frac{l}{2} \right). \quad (23)$$

При определении частоты и главных форм колебаний несущего каната с сосредоточенной массой используем его симметрию относительно середины пролета. Граничные условия в этом случае примут вид: при $z = \frac{l}{2}$: $\Theta_k \left(\frac{l}{2} \right) = 0$; $Q_k \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} I_{mk}^*$, отсюда

$$\begin{aligned} \Theta_k(0) y_{2k}' \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k}' \left(\frac{l}{2} \right) &= 0; \\ -B\Theta_k(0) y_{2k}'' \left(\frac{l}{2} \right) - Q_k(0) y_{4k}'' \left(\frac{l}{2} \right) &= \frac{1}{2} I_{mk}^*. \end{aligned} \quad (24)$$

На основании (22) и (23)

$$\dot{I}_{mk}^* = m\omega_k^2 \left(\dot{\Theta}_k(0) y_{2k} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{Q_k(0)}{B} y_{4k} \left(\frac{l}{2} \right) \right). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получим систему однородных уравнений, определитель которой равен нулю, т. е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y'_{2k} \left(\frac{l}{2} \right) & -y'_{4k} \left(\frac{l}{2} \right) \\ -y'''_{2k} \left(\frac{l}{2} \right) & y'''_{4k} \left(\frac{l}{2} \right) \end{vmatrix} - \frac{m\omega_k^2}{2B} \begin{vmatrix} y'_{2k} \left(\frac{l}{2} \right) & -y'_{4k} \left(\frac{l}{2} \right) \\ y_{2k} \left(\frac{l}{2} \right) & -y_{4k} \left(\frac{l}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

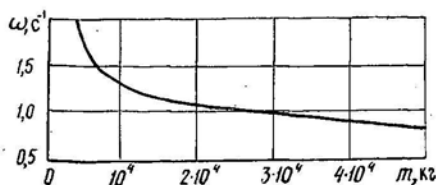
Подставляя выражения функций, входящих в уравнение (26), после преобразований получим зависимость для определения частот собственных колебаний несущего каната с сосредоточенной массой, расположенной посередине пролета:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_k \frac{l}{2}}{\beta_k} - \frac{\operatorname{tg} \alpha_k \frac{l}{2}}{\alpha_k} = \frac{2B(\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{m\omega_k^2}, \quad (27)$$

где α_k, β_k — значение коэффициентов при $H = T_1$.

На рис. 3 приведен график зависимости частоты ω колебаний несущего каната с опорами на одном уровне с сосредоточенной массой от массы груза при следующих исходных данных: канат 25,5 ГЛ-В-Н 1568 ГОСТ 3077—80, $l = 300$ м, $T_0 = H_0 = 117,7$ кН, $q = 22,3$ Н/м, $B = 117,7$ Н · м².

Рис. 3. График зависимости $\omega = f(m)$



Из графика следует, что увеличение массы груза приводит к уменьшению частоты собственных колебаний несущего каната.

Для сравнения методов определения частот собственных колебаний несущего каната с сосредоточенной массой m , расположенной посередине пролета, нами найдена частота колебаний несущего каната 25,5 ГЛ-В-Н 1568 ГОСТ 3077—80 по выражению (27) настоящей статьи, по формуле, полученной в работе [8], и по выражению частоты свободных колебаний груза, подвешенного на пружине:

$$\omega^2 = \frac{C'}{M}. \quad (28)$$

Здесь C' — жесткость пружины;

M — приведенная масса системы несущий канат — груз; согласно [8],

$$M = m + k_m \rho l, \quad (28a)$$

где k_m — коэффициент приведения массы каната к середине пролета

$$k_m = \frac{1}{3} (1 + \xi_1 + 0,4\xi_1^2);$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2 + 4P/ql}.$$

Величина $C' = \frac{1}{\lambda}$, где λ — податливость несущего каната. Согласно [5], при положении груза посередине пролета

$$\lambda = \frac{T_1 - k' \left(Q + \frac{ql}{2 \cos \beta} \right) l}{(T_1 \cos \beta)^2} \frac{1}{4}, \quad (29)$$

где Q — вес груза с кареткой;
 β — угол наклона хорды пролета к горизонту;
 k' — коэффициент пропорциональности.

На основании формул (28) и (29) при $Q = P$ и $\beta = 0$ получим:

$$\omega^2 = \frac{4T_1^2}{T_1 - k'(P + ql/2)} \frac{1}{lM}. \quad (30)$$

В результате подсчета по выражению (27), формуле в работе [8] и уравнению (30) при исходных данных $m = 3010$ кг, $l = 300$ м, $T_0 = 117,7$ кН, $\beta = 0$, $q = 22,3$ Н/м, $F = 243,76$ мм², $B = 117,7$ Н · м², $E = 1,1772 \cdot 10^{11}$ Н/м² соответственно получено $\omega_1 = 0,977$ с⁻¹, $\omega_2 = 1,26$ с⁻¹, $\omega_3 = 1,27$ с⁻¹.

Анализ результатов подсчета частоты собственных колебаний несущего каната с сосредоточенной массой посередине пролета показал, что замена каната с сосредоточенной массой одномассовой системой с приведенной массой дает относительную ошибку до 30 % в определении частоты собственных колебаний системы.

Исследования показали, что частота собственных колебаний увеличивается с возрастанием изгибной жесткости и натяжения несущего каната и уменьшается при увеличении длины пролета каната, его плотности единицы длины и массы сосредоточенного груза.

Проведенные исследования позволяют определить частоту и главные формы колебаний несущего каната как предварительно деформированного стержня с малой стрелкой провеса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Алябьев В. И. Динамический расчет несущих канатов однопролетных трелевочно-погрузочных установок // Тр. / ЦНИИМЭ.— 1964.— Вып. 53.— С. 87—107.
- [2]. Ананьев А. А., Плодовитов Н. Н. О колебаниях несущего каната кабельного крана при свободной разгрузке // Тр./ЛПИ.— 1955.— № 182.— С. 86—95.
- [3]. Белая Н. М., Прохоренко А. Г. Канатные лесотранспортные установки.— М.: Лесн. пром-сть, 1964.— 229 с. [4]. Глушко М. Ф., Волоконский В. Ф., Чиж А. А. Уравнения малых поперечных колебаний каната как закрученного тонкого стержня // Стальные канаты.— К.: Техника, 1972.— Вып. 9.— С. 280—284. [5]. Матвеев Э. Н., Слелко И. И. Исследование поперечной податливости несущих канатов // Лесн. журн.— 1984.— № 6.— С. 50—54.— (Изв. высш. учеб. заведений). [6]. Рекач В. Г. Приложение теории колебаний гибких нитей к расчету подвесных канатных дорог // Тр./МИСИ.— 1939.— № 2.— С. 57—81. [7]. Скобей В. В., Михайлов А. А. Динамический расчет трелевочно-погрузочных установок с несущим канатом переменной длины КПУ-2 // Тр./ЦНИИМЭ.— 1964.— Вып. 58.— С. 52—77. [8]. Слелко И. И. Исследование динамических усилий в несущем канате с закрепленными концами при обрыве и стопорении груза // Лесн. журн.— 1977.— № 5.— С. 40—45.— (Изв. высш. учеб. заведений). [9]. Кэб. L. Angenaherte Bestimmung der Massenkräfte infolge der Schwingung einer an gespannten Seil hängenden Last // Bauingenieur.— 1933.— N 33/34.

УДК 630*375.4

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА
СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПАЧКИ ДЕРЕВЬЕВ
(ХЛЫСТОВ) ПРИ ТРЕЛЕВКЕ**

Л. В. КОРОТЯЕВ

Архангельский лесотехнический институт

Коэффициент сопротивления перемещению (КСП) пачки деревьев (хлыстов) при трелевке — один из основных критериев рейсовой нагрузки на трелевочную машину и энергоемкости трелевки. Поэтому изучение КСП весьма важно для лесозаготовительного производства в целях совершенствования и повышения эффективности трелевочных машин. Цель нашей работы — построить математическую модель КСП, учитывающую влияние на него различных природных, технологических и производственно-технических факторов, для использования в конструкторских и технологических расчетах и при нормировании трелевочных работ.

Главными факторами, влияющими на КСП пачки деревьев (хлыстов) при трелевке μ , как показали исследования [1], являются вес и объем пачки, вид перемещаемого груза (деревья или хлысты), число и средний объем деревьев (хлыстов) в пачке, объем стрелованной по волоку древесины, способ и скорость трелевки, шероховатость и состояние трелевочного пути, сезон года и жесткость трелевочной системы.

КСП пачки складывается из коэффициентов трения μ_t и лобового сопротивления μ_d . При $\mu_d = W_d/P$

$$\mu = \mu_t + \frac{W_d}{P}, \tag{1}$$

где W_d — лобовое сопротивление движению, Н;

P — нормальная нагрузка на трелевочный волок от веса волочащейся части пачки, Н.

Это уравнение является исходным для выражения влияния различных факторов на μ . При

$$P_d^0 = k_n G, \tag{2}$$

где k_n — доля веса пачки, приходящаяся на волок [5];

G — вес пачки, Н,

получаем уравнение зависимости μ от веса пачки:

$$\mu = \mu_t + \frac{W_d}{k_n G}. \tag{3}$$

Уравнение (3) выражает также зависимость коэффициента μ от объема пачки, числа деревьев (хлыстов) в ней и среднего объема хлыста (ствола), поскольку вес пачки

$$G = V g \rho / \varphi, \tag{4}$$

а объем пачки V (m^3)

$$V = n V_x. \tag{5}$$