

УДК 532.001.57

***П.Н. Гагарин, А.Н. Вихарев, Т.С. Исупова***

Гагарин Павел Николаевич родился в 1959 г., окончил в 1983 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики Архангельского государственного технического университета. Имеет около 30 печатных трудов в области водного транспорта леса и гидромеханики.



Вихарев Александр Николаевич родился в 1961 г., окончил в 1987 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры водного транспорта леса и гидравлики Архангельского государственного технического университета. Имеет около 60 печатных трудов в области экологии водного транспорта леса.



Исупова Татьяна Степановна родилась в 1947 г., окончила в 1971 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики Архангельского государственного технического университета. Имеет около 20 печатных работ в области динамики станков и моделирования динамических систем.



### **РАДИАЦИОННО-АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКОРОСТЕЙ И ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ ИЛИ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОМ СЛЕДЕ**

Продолжено исследование аналоговым методом характеристик турбулентных течений на основе физических процессов электромагнитного излучения. Аналогия показана на примере общего моделирования турбулентной струи и подтверждена результатами экспериментов.

*Ключевые слова:* турбулентные потоки, затопленная струя, скорости течения, турбулентные напряжения, аналогия, излучение, поглощение, рассеивание, длина волны.

Механика турбулентных течений и взаимодействия их с твердыми телами представляет одну из самых сложных и недостаточно изученных проблем, несмотря на большое количество существующих моделей. Теория турбулентных струй имеет важное значение в ряде научно-технических направлений, в том числе в водном транспорте и буксировке по воде. Общая

схема гидромеханического следа имеет ту же основу, что и струйное течение.

В связи с этим авторы разработали метод радиационно-аналогового моделирования турбулентных течений на примере светового излучения. Исследования показали, что скрытые механизмы и параметры в течениях часто нельзя непосредственно наблюдать или измерить, а также описать с позиций классической гидромеханики. Именно методологические цели исследований, позволяющие доказать единство природы внешне различных физических процессов, представляются наиболее важными.

Основы метода были изложены ранее [2–4] на примере равномерных ограниченных течений и проверены на ряде хорошо известных экспериментов.

Существующая информация о движении турбулентных струй является обычно эмпирической. Полуэмпирические методы расчета основаны на совместном решении уравнений Рейнольдса и уравнений неразрывности течения. Но при этом даже ряд упрощающих допущений сопровождается весьма сложными решениями. Несмотря на безусловный приоритет классических методов, представляется полезным изучить гидромеханические процессы с позиций отмеченной аналогии.

В нашей работе сделана попытка создать такую модель на основе хорошо известной теории взаимодействия электромагнитных волн с окружающей средой. Для этого приведем краткое доказательство наличия волновых механизмов в гидромеханических процессах.

Первоначально представим жидкость в виде некоторой субстанции, не имеющей внутренних потерь энергии, но обладающей турбулентной вязкостью. Тогда, пренебрегая членами более высокого порядка малости, суммарную плотность количества движения ( $s$ ) в каждой точке течения можно представить в виде

$$s = \rho(u^2 + t^2) = \rho \left( u^2 + l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $u$ ,  $t$  – соответственно действительная (продольная) и мнимая (поперечная) скорости потока, которые имеют первоначальный или базовый характер;

$\rho$  – плотность жидкости;

$l$  – величина, подобная «пути смещения Прандтля»;

$y$  – поперечная (радиальная) координата потока.

Первое слагаемое в формуле (1) оценивает плотность потока количества движения вдоль течения (по оси  $x$ ). Второе слагаемое (по оси  $y$ ) имеет структуру известной формулы Прандтля [7] для турбулентного напряжения трения, т. е. оценивает поперечную компоненту плотности потока количества движения.

Определим функцию базовой скорости  $u$  исходя из ее наиболее энергетически выгодного распределения по условию минимизации функционала:

$$I = \rho \int s \, dy = \rho \int \left( u^2 + l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dy. \quad (2)$$

Для определения  $u = f(y)$  используем известное уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial s}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)} - \frac{\partial s}{\partial u} = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial s}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)} = 2\rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{d}{dy} \frac{\partial s}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)} = 2\rho l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial s}{\partial u} = 2\rho u.$$

Таким образом, формулу (3) приведем к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - l^{-2} u = 0$$

с корнями характеристического уравнения  $k_1 = il^{-1}$  и  $k_2 = -il^{-1}$ . Общее решение такого уравнения известно. Принимаем следующие начальные условия:

при  $y = 0$   $u = U$  и  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  ( $U$  – скорость на оси струи или базовая амплитуда

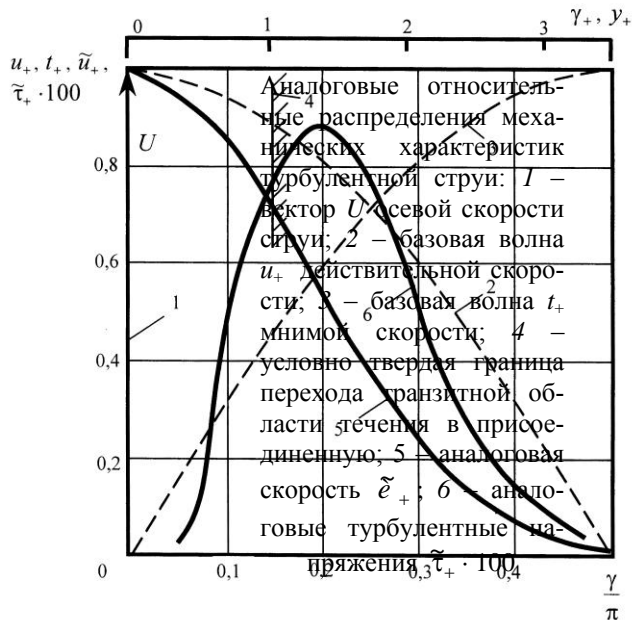
скорости течения вообще). Интегрируя, получаем распределения действительных и мнимых базовых скоростей в виде гармонических волн (см. рисунок):

$$u = U \cos \frac{y}{l} = U \cos \gamma; \quad u_+ = \cos \gamma; \quad (4)$$

$$t = U \sin \frac{y}{l} = U \sin \gamma; \quad t_+ = \sin \gamma, \quad (5)$$

где  $\gamma$  – угловая поперечная (радиальная) координата течения.

Знак плюс здесь и далее обозначает безразмерные относительные характеристики.



В реальных течениях базовая скорость  $u$  искажается за счет влияния стенок (в трубах и т. д.) и потерь энергии. Характеристики  $t$  как таковой на практике не существует, но она лежит в основе определения турбулентных напряжений. Таким образом, результирующие параметры течений можно определять на базе различных комбинаций характеристик электромагнитных волн при их преломлении, отражении и рассеивании.

Поскольку аналоговый метод предполагает единую базовую схему для ограниченных и свободных течений, необходима привязка к разработанной ранее модели равномерного течения в трубах.

В ограниченных течениях «фаза падения»  $\gamma_0$  волн на границу вполне определенно зависит от аналогового числа Рейнольдса ( $Re$ ) и с его уменьшением в турбулентном режиме слабо растет [3]. Так, при  $Re = 1,45 \cdot 10^6$   $\gamma_0 = 0,3$  рад, а при  $Re = 7,53 \cdot 10^3$   $\gamma_0 = 0,4$  рад.

Аналоговое напряжение трения  $\tau$  равномерного или установившегося течения определяется через квадрат граничной амплитуды преломленной мнимой (нормальной к ограничивающей поверхности) волны. По аналогии с известной формулой Френеля, приведенной к режиму максимальной поляризации, имеем

$$\tau = \rho \chi^2 \frac{\sin^4 \gamma_0}{\cos^2 \gamma_0} U^2, \quad (6)$$

где  $\chi$  – постоянная Кармана, равная 0,4; известна из логарифмического распределения скоростей.

В круглых трубах в качестве базовой амплитуды  $U$  следует принимать среднюю скорость течения. Аналоговый коэффициент гидравлического трения Дарси–Вейсбаха [2]

$$\lambda = 8\chi^2 \frac{\sin^4 \gamma_0}{\cos^2 \gamma_0} . \quad (7)$$

Сравнение коэффициента  $\lambda$ , найденного по формуле (7), с хорошо известными эмпирическими данными в диапазоне чисел Рейнольдса  $4 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 1 \cdot 10^6$  показывает их полное соответствие. При дальнейшем уменьшении числа Рейнольдса наступает кризис сопротивления (резкий провал коэффициента  $\lambda$ ) и переход в ламинарный режим. Аналоговая же кривая  $\lambda$  продолжает монотонно возрастать при  $\text{Re} \rightarrow 0$ .

Как известно, в струйных затопленных течениях возникают турбулентные напряжения трения, которые существенно выше трения жидкости о стенки труб при сравнимых скоростях и размерах. Пиковые значения турбулентных напряжений ( $\tau \approx 0,01\rho U^2$ ) возникают в области перемешивания транзитного потока с присоединенным. Представим границу транзитного и присоединенного потоков условно твердой. Тогда допустимо ввести условный коэффициент трения  $\lambda$  для турбулентной струи, который будет выше всех соответствующих значений для турбулентного режима в трубах.

Отсюда естественно предположить, что режим турбулентных струй определяется искусственным продолжением аналоговой кривой  $\lambda$  в область малых значений  $\text{Re}$ , где условная «фаза падения»  $\langle \gamma_0 \rangle$  повышается [4]. Понижение числа Рейнольдса  $\text{Re} = Ud/\nu$  (где  $d$  – некоторый поперечный размер течения) с увеличением  $\lambda$  для струи можно объяснить тем, что коэффициент вязкости  $\nu$  здесь носит турбулентный характер, и, как известно, он много больше обычного коэффициента кинематической вязкости (в трубах). Таким образом, струйное транзитное течение можно условно рассматривать как ограниченное установившееся, границы которого имеют те же механические свойства, что и сама жидкость (в случае ламинарного режима при  $\text{Re} < 2000$  наблюдается подобное явление).

Для моделирования струйного течения необходимо определить условную «фазу падения»  $\langle \gamma_0 \rangle$ , которую будем рассматривать как максимально возможную для всех установившихся и равномерных течений. Этой фазе соответствует определенная линейная координата  $\langle y_0 \rangle$  или некоторая характерная длина  $\langle l \rangle = \langle y_0 \rangle$ . В относительном виде для струи  $\langle l_+ \rangle = 1$ , а для любого потока вообще

$$\langle l_+ \rangle = \langle \gamma_{0+} \rangle = \frac{\langle l \rangle}{r} = \frac{\langle \gamma_0 \rangle}{\gamma_0} \geq 1. \quad (8)$$

В теории излучения [1] существует величина, которая, на наш взгляд, аналогична  $\langle l_+ \rangle$ . Это вероятность выживания кванта или длина свободного пробега фотона. Она обратно пропорциональна коэффициенту поглощения  $\mu$ , который в относительном виде равен:

$$\mu = \langle l_+ \rangle^{-1} = \langle \gamma_{0+} \rangle^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, длина свободного пробега может служить характерным размером течения или линейной единицей измерения. Здесь она в качественном и количественном отношении приобретает существенно бóльшую определенность, чем известная длина пути смещения Прандтля.

Фактически фаза падения  $\gamma_0$  усреднена, а переход от транзитного течения к присоединенному в струе является непрерывным. Поэтому коэффициент поглощения следует рассматривать переменным вместе с текущей координатой  $y$  или  $\gamma$ :

$$\mu_+ = \frac{y}{\langle y_0 \rangle} = \frac{\gamma}{\langle \gamma_0 \rangle} = y_+ = \gamma_+. \quad (10)$$

Такое непрерывное изменение оптических или радиационных характеристик (например показателя преломления) можно наблюдать в аналоговом процессе атмосферной рефракции космического излучения, например света.

Элементарное изменение плотности количества движения  $\tilde{s}$  определим по аналогии с изменением интенсивности световой волны в поглощающей среде:

$$-d\tilde{s} = \tilde{s}\mu_+ dy_+ = \tilde{s}y_+ dy_+, \quad (11)$$

что при граничном условии на оси струи

$$\tilde{s}_{y=0} = \rho U^2$$

соответствует решению

$$\tilde{s} = \rho U^2 \exp\left(-\frac{y_+^2}{2}\right); \quad \tilde{s}_+ = \exp\left(-\frac{y_+^2}{2}\right). \quad (12)$$

В соответствии с исходной моделью течения  $\tilde{s}_+$  распадается на действительную и мнимую скорости в виде затухающих волн:

$$\tilde{u}_+ = \exp\left(-\frac{\gamma_+^2}{4}\right) \cos \gamma = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4\langle \gamma_0 \rangle^2}\right) \cos \gamma; \quad (13)$$

$$\tilde{t}_+ = \exp\left(-\frac{\gamma_+^2}{4}\right) \sin \gamma = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4\langle \gamma_0 \rangle^2}\right) \sin \gamma. \quad (14)$$

Полагая, что  $\tilde{t}_+$  является подобием усредненных турбулентных пульсаций (коэффициент подобия  $\chi$ ), напряжение турбулентного трения в фазе  $\gamma_0$  можно оценить формулами

$$\tau = \rho \chi^2 k t_{0+}^2 U^2, \quad \tau_+ = \chi^2 k t_{0+}^2, \quad (15)$$

где  $k$  – коэффициент корреляции турбулентных пульсаций (по данным С.С.

Кутателадзе и др. [5], при развитой турбулентности  $k \approx 0,4$ ).

Для определения предельной переходной фазы  $\langle \gamma_0 \rangle$  или длины свободного пробега, как указывалось выше, представим условную границу перехода транзитного течения в присоединенное квазитвердой. Турбулентное трение, определенное по формуле (15), приравняем к гидравлическому, найденному по формуле (6). При  $\gamma_0 = \langle \gamma_0 \rangle$  получим условную фазу перехода для струи  $\langle \gamma_0 \rangle = 26,33^\circ = 0,460 \text{ рад} = 0,146\pi \text{ рад}$ . На рисунке верхняя шкала поперечного размера относительных распределений показана в масштабных единицах  $\langle l \rangle = \langle \gamma_0 \rangle$ .

Разумеется, эта фаза не является абсолютно точной и единой для всех случаев течений, так как они различаются разными уровнями турбулентности, а следовательно, и коэффициентами корреляции  $k$ . С известным приближением примем полученную фазу как единую масштабную единицу в излагаемой приближенной модели.

На рисунке построена аналоговая кривая скорости  $\tilde{y}_+$ . Распределение действительной скорости вполне соответствует фактическому. Сравнение наших данных с результатами обширных и тщательных измерений Вигнаского и Фидлера [6] показывает их хорошее совпадение. Кроме того, распределение  $\tilde{y}_+$  вполне удовлетворяет профилю, рассчитанному на основе уравнений Рейнольдса и уравнений неразрывности течения [7].

На этом же рисунке показана аналоговая кривая распределения турбулентных напряжений ( $\tau_+$ ) согласно формуле (15). Пиковое значение  $\tau_+ = 0,0088$ . По данным измерений [8, 9 и др.], оно приблизительно равно 0,01 с возможным разбросом на несколько десятков процентов. Разброс объясняется большой сложностью и индивидуальными особенностями течений, в частности уровнем их турбулентности. Важно отметить также качественное соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Полученная переходная фаза разделяет возмущенную область струи на транзитное и присоединенное течения в соотношении приблизительно 1:2. Этот факт подтверждается известными экспериментальными данными [6].

Такова аналоговая модель струйного турбулентного течения на основе аналогии излучательных процессов. Мы не ставили цель выявить количественное различие характеристик плоских и осесимметричных струй, равно как плоских и цилиндрических волн. В области развития течения ( $0 < \gamma < \pi/2$ ) это различие сказывается незначительно. В данной работе изложена лишь принципиальная основа модели. Общая схема струйного течения будет рассмотрена в дальнейшем.

Аналоговый метод существенно отличается от методов классической гидромеханики и чисто эмпирических моделей. В нем используется угловая координата по ширине струи, что вызвано необходимостью учета волновой природы турбулентных течений. Поэтому одним из важнейших параметров, которым обладает любое сечение реального потока, является длина падающей волны. Это понятие невозможно интерпретировать с пози-

ций классической гидромеханики. В рассматриваемом же методе длина волны в абсолютном ( $L$ ) и относительном ( $L_+$ ) виде определяется по формулам

$$L = \frac{2\pi r}{\gamma_0} = 2\pi l; \quad L_+ = \frac{2\pi}{\gamma_0}, \quad (16)$$

где  $r$  – радиус трубы или полуразмер конкретного течения.

Естественно предположить, что при расширении струи скорость распространения базовых волн по оси  $y$  равна скорости струи на оси в местном сечении. В этом случае  $L = x$ , где  $x$  – продольная координата, имеющая начало на мнимом полюсе струи, находящемся за начальным сечением (соплом).

Тогда полуугол раствора струйного течения, соответствующий первой четверти волны,  $\alpha \approx \arctg(1/4) \approx 15^\circ$ . Это также подтверждается экспериментами [6]. Как указывалось в работе [4], очевидна аналогия напряжения трения течения на твердой или квазитвердой границе с интенсивностью рассеивания излучения (света). Последняя, согласно закону Релея, обратно пропорциональна длине волны в четвертой степени.

По нашему предположению, режим кризиса сопротивления, наблюдаемый в гидромеханике, аналогичен режиму аномальной дисперсии при облучении вещества электромагнитными волнами. Этот процесс с позиции аналогии пока не исследован.

Аналоговый метод позволит оценить механику ограниченных струй, обтекания различных препятствий потоком и др. Как известно, с позиции классической гидромеханики такие расчеты ведут к существенным математическим затруднениям. Предлагаемый метод может быть распространен на моделирование процессов переноса теплоты и концентрации вещества, а также на другие проблемы гидро- и аэромеханики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением: Справочник. – М.: Энергоиздат, 1991. – 432 с.
2. Гагарин П.Н. Радиационно-оптическая аналогия механики турбулентного потока // Лесн. журн. – 1995. – № 2-3. – С. 55–61. – (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Гагарин П.Н., Вихарев А.Н. О волновой природе напряжения трения в турбулентных потоках // Лесн. журн. – 1998. – № 1. – С. 47–51. – (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Гагарин П.Н., Вихарев А.Н. Первичные результаты радиационно-аналоговых исследований механики турбулентных течений // Вклад ученых АГТУ в развитие науки и техники: Сб. науч. тр. АГТУ. – Архангельск, 1999. – С. 187–195.
5. Кутателадзе С.С. и др. Экспериментальное исследование структуры пристенной турбулентности и вязкого подслоя / С.С. Кутателадзе, Е.М. Хбахпашева, В.В. Орлов и др. // Турбулентные сдвиговые течения. Т.1 / Пер. с англ.; Под ред. А.С. Гиневского. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 92–107.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. – Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.



7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

8. Мосс В.Д., Беккер С., Бредбери Л. Дж. С. Измерения скорости в некоторых областях рециркулирующих течений // Турбулентные сдвиговые течения. Т. 1. /Пер. с англ.; Под ред. А.С. Гиневского. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 203–213.

9. Wignanski A.D. Fielder H.E. The two-dimensional / mixing region // J. Fluid Mech. – 1970. – 41/2. – P. 327–361.

Архангельский государственный  
технический университет

Поступила 04.03.03

*P.N. Gagarin, A.N. Vikharev, T.S. Isupova*

### **Radiation-analogous Simulation of Velocities and Turbulent Shear Stress in Submerged Flow or Hydrodynamic Trace**

Investigation of turbulent flows' characteristics by analog method based on physical processes of electromagnetic radiation is continued. Analogy is demonstrated based on the example of general simulation of a turbulent flow and confirmed by the experimental results.

---