ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
№ 1 ЛЕСНОЙ ЖУРНАЛ 2000

УДК 629.114.4.001.2

С.И. МОРОЗОВ

Архангельский государственный технический университет

Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет около 170 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.

УДАР ПЛАТФОРМЫ С ГРУЗОМ О ПРЕПЯТСТВИЕ

Рассмотрена методика расчета линейных и угловых скоростей для контейнера, установленного на железнодорожной платформе или в кузове автомобиля, после их удара о некоторое препятствие. При выводе расчетных зависимостей использовано уравнение Лагранжа второго рода.

Technique of calculating linear and angular velocities is considered for the container, placed on the railway platform or truck body after their stroke on some obstacle. The Lagrange equation of second kind was used in deriving dependencies.

Движение платформы железнодорожного состава (или автомобиля) с грузом в виде контейнера (рис. 1) при ударе о некоторое препятствие сопряжено со следующими случаями смещения груза:

скольжение контейнера по платформе, если он не закреплен упором;

поворот контейнера вокруг упора, если он имеется.

В обоих случаях груз перемещается на платформе (автомобиле), что затрудняет нормальное ее движение.

Рассмотрим второй случай и решим задачу о нахождении угловой скорости контейнера после удара.

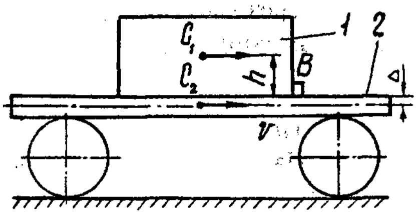

Рис. 1. Основная расчетная схема (C_1, C_2 – центры масс тел; B – упор; v – скорость движения платформы до удара): *1*, *2* – контейнер и платформа

Упрощенная расчетная схема приведена на рис. 2. Контейнер *1* движется до удара вместе с платформой со скоростью v. Обозначим: m_1 – масса контейнера, h – высота его центра масс (точка C_1) над полом платформы. Аналогично для платформы *2*: m_2 – масса платформы, Δ – расстояние от центра масс платформы (точка C_2) до пола платформы.

Буквой B обозначим упор для контейнера на платформе, который условно изобразим в виде цилиндрического шарнира, буквой S – импульс ударной силы. Ударяемое тело *3* имеет массу m_3. Оно на схеме изображено пунктиром.

На рис. 2 показаны оси n_2 и n_3 с началом в точке соударения платформ E. Они лежат на осях платформ и направлены в противоположные стороны. Орты этих осей обозначим $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_3$.

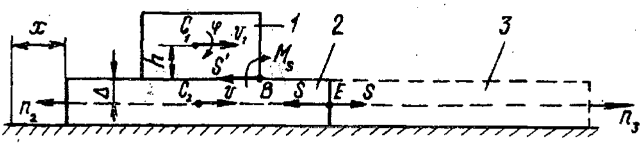

Рис. 2. Упрощенная расчетная схема

Для вывода расчетных зависимостей используем уравнение Лагранжа II рода в форме [3]

$$\left(\frac{dT}{\partial \dot{q}}\right)_2 - \left(\frac{dT}{\partial \dot{q}}\right)_1 = R_q, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия рассматриваемой механической системы до и после удара (индексы 1 и 2);

$\dot{q}$ – обобщенные скорости;

R_q – обобщенные импульсы ударных сил.

Механическая система контейнер – платформа имеет две степени свободы. Ее обобщенные координаты x и φ показаны на рис. 2. Тогда выражение для кинетической энергии системы будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Здесь J_B – момент инерции контейнера относительно оси, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости рисунка.

В данном случае

$$J_B = m_1\rho^2,$$

где ρ – радиус инерции контейнера относительно точки B.

Находим частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_B\dot{\varphi} = m_1\rho^2\ \dot{\varphi}$$

и обобщенные импульсы ударных сил

$$R_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{S\delta x}{\delta x} = S;$$

$$R_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta x} = \frac{Sh\delta\varphi + S\Delta\delta\varphi}{\delta\varphi} = S\,(h + \Delta).$$

При определении обобщенной силы R_φ сначала, как показано на рис. 2, приведем импульс S к точке B. Получим приведенную силу $S' = S$, приложенную в точке B, и присоединенную пару сил с моментом M_S, который равен моменту силы S относительно точки приведения B: $M_S = S\,\Delta$.

Составим расчетные зависимости по уравнению (1), полагая в начале удара $\dot{x} = v_1 = v$, $\dot{\varphi} = 0$, в конце – $\dot{x} = u_1 = u$, $\dot{\varphi} = \omega_1 = \omega$.

После подстановки выражений для частных производных и обобщенных импульсов в уравнение (1) получим два уравнения:

$$(m_1 + m_2)\,u - (m_1 + m_2)v = S;$$
$$m_1\rho^2\omega = S\,(h + \Delta).$$

Из первого уравнения находим u, из второго – ω:

$$u = v + \frac{S}{m_1 + m_2}; \qquad (a)$$

$$\omega = \frac{S(h + \Delta)}{m_1\rho^2}, \qquad (b)$$

где u и ω определены с точностью до S.

Для определения S воспользуемся зависимостью между скоростями движения тел до и после удара [2]:

$$\overline{u}_2'\overline{n}_2 + \overline{u}_3'\overline{n}_3 = -\varepsilon\,(\overline{v}_2'\overline{n}_2 + \overline{v}_3'\overline{n}_3)\,, \qquad (3)$$

где ε – коэффициент восстановления тел в точке удара;

v', u' – скорости тел *2* и *3* до и после удара в точке E.

После преобразования уравнения (3) по методике [2] получим

$$S = -\frac{(1+\varepsilon)A_1}{G}.$$

Так как $A_1 = \overline{v}_2\overline{n}_2 + \overline{v}_3\overline{n}_3$; $G = \dfrac{1}{m_1 + m_2} + \dfrac{1}{m_3}$, то

$$S = -\frac{(1+\varepsilon)(v - v_3)}{\dfrac{1}{m_1 + m_2} + \dfrac{1}{m_3}}\,, \qquad (4)$$

где $v_2 = v_1 = v$.

Используя это выражение и подставляя его в уравнения (a) и (b), получаем после преобразований

$$u = v - \frac{(1+\varepsilon)(v - v_3)}{1 + (m_1 + m_2)/m_3}; \qquad (5)$$

$$\omega = -\frac{(1+\varepsilon)(h+\Delta)(v-v_3)}{[1/(m_1+m_2)+1/m_3]m_1\rho^2}. \qquad (6)$$

Уравнения (4) – (6) дают полное решение задачи в общем случае. В частном случае, когда происходит удар о массивное неподвижное тело, т. е. $m_3 = \infty$ и $v_3 = 0$, имеем

$$u = v - \frac{(1+\varepsilon)v}{1} = v - (1+\varepsilon)v = -\varepsilon v; \qquad (c)$$

$$\omega = \frac{-(1+\varepsilon)(m_1+m_2)v}{m_1\rho^2}(h+\Delta) = -\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{(1+\varepsilon)(h+\Delta)v}{\rho^2}. \qquad (d)$$

Аналогичное решение может быть получено с помощью общих теорем динамики, в частности теорем об изменении количества движения и моментов количества движения.

Для аналогичного условия при упрощенном решении задачи № 44.28 работы [1] найдено

$$\omega = \frac{vh}{\rho^2}. \qquad (e)$$

Нами получено более точное выражение для ω. Уравнение (d) показывает, что значение ω зависит от значения коэффициента восстановления ε и размеров поперечного сечения платформы, которые характеризуются величиной Δ. Знак минус в формуле (6) показывает, что в данном случае вращение контейнера после удара происходит по часовой стрелке.

Погрешность вычислений при использовании формулы (e) вместо формулы (d) можно найти по выражению

$$\eta = \frac{m_1+m_2}{m_1}(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\Delta}{h}\right).$$

Проанализируем его. Предварительно обозначим $m_1/m_2 = n$. Тогда

$$\eta = (1+n)(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\Delta}{h}\right).$$

Коэффициент восстановления изменяется в диапазоне $0 \le \varepsilon \le 1$, т. е. множитель $(1 + \varepsilon)$ лежит в диапазоне $1 \le (1 + \varepsilon) \le 2$. Поэтому значение η при решении задач удара может изменяться в два раза.

При $m_1 = m_2$ имеем $n = 1$, при $m_2 > m_1$ имеем $n < 0$, при $m_2 < m_1$ имеем $n > 1$. В последнем случае η изменяется в несколько раз.

Значительно изменяется погрешность вычисления η и в зависимости от соотношения Δ/h.

Таким образом, уточнение значения ω при определении его по уравнению (d) вместо (e) является весьма существенным и им нельзя пренебрегать.

В общем случае, когда $m_3 \ne \infty$ и $v_3 \ne 0$, значение ω надо находить по формуле (6). Ей можно придать вид

$$\omega = -\frac{(1+\varepsilon)(v-v_3)(m_1+m_2)m_3\left(1+\dfrac{\Delta}{h}\right)}{(1+m_3)m_1\rho^2}. \qquad (6а)$$

При анализе эту формулу удобно представить в виде

$$\omega = -\frac{(m_1+m_2)m_3}{(1+m_3)m_1}\cdot\frac{(1+\varepsilon)(v-v_3)(1+\Delta/h)}{\rho^2}. \qquad (6б)$$

Обозначим в формуле (6б) первый множитель, состоящий из масс, буквой p, т. е.

$$p = \frac{(m_1+m_2)m_3}{(1+m_3)m_1},$$

тогда

$$\omega = -p\frac{(1+\varepsilon)(v-v_3)(1+\Delta/h)}{\rho^2}.$$

Если далее обозначим $m_1 = nm_2$, то

$$p = \frac{(1+n)m_3}{n(1+m_3)}. \qquad (7)$$

В рассматриваемом примере происходит удар платформы *2* по неподвижному массивному телу *3*, т. е. $m_3 = \infty$, поэтому

$$p = \frac{(1+n)}{\dfrac{1}{m_3}+1} \approx \frac{1+n}{n}. \qquad (7а)$$

При уменьшении m_3 (по сравнению с $m_3 = \infty$) знаменатель формулы (7) будет увеличиваться, т. е. значение p будет уменьшаться.

Значит при прочих равных условиях максимальное значение величины ω будет иметь место при ударе платформы о массивное неподвижное тело. Однако все высказанные выше соображения о влиянии на η величин n, ε и Δ/h остаются в силе.

Таким образом, в процессе изучения задачи о движении контейнера при соударении платформ железнодорожного состава необходимо рассматривать наиболее неблагоприятный случай и вести расчет по формуле (*d*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. - 35-е изд., перераб. / Под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина, И.Б. Челпанова. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - 480 с. [2]. Морозов С.И. Удар двух тел: Методические указания по решению задач. - Архангельск: РИО АГТУ, 1996. - 56 с. [3]. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1997. - 224 с.

Поступила 28 октября 1997 г.