

УДК 630*378:539.3

А.С. Миляев

Миляев Александр Сергеевич родился в 1936 г., окончил в 1959 г. Ленинградское высшее военное инженерно-техническое училище Военно-Морского Флота, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики С.-Петербургской лесотехнической академии. Имеет более 50 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, механики силового взаимодействия конструкций и сооружений с грунтом при статических и динамических нагрузках.



НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕРЕГОВОГО ОТКОСА, НАГРУЖЕННОГО РЕАКЦИЕЙ АНКЕРНОЙ ОПОРЫ

Предложены математическая модель и алгоритм расчета дополнительного поля напряжений в грунте откоса, вызванного усилиями, передаваемыми тросами от наплавных сооружений к жестким анкерным балкам, заглубленным в откос параллельно руслу реки. Приведен пример расчета формы и размеров зоны возможного разрушения грунта откоса под действием сосредоточенной силы.

Ключевые слова: поле напряжений, массив грунта, анкерные балки, наплавные сооружения, конформные отображения.

В качестве анкеров береговых опор речных наплавных сооружений могут быть использованы балки, заглубленные в откос параллельно руслу реки. В первом приближении можно принять, что анкерные балки достаточно жесткие и не деформируются под действием реактивных напряжений в грунте. Береговые откосы, как правило, образованы плотными песчаными, крупнообломочными и (или) глинистыми грунтами, деформирование которых при умеренных нагрузках удовлетворительно моделируется линейно-упругой средой вплоть до перехода в предельное состояние.

На рис. 1 показан контур поперечного сечения (профиль) русла реки, включающий склон к речной долине ab (верхний склон), обрыв bc ,

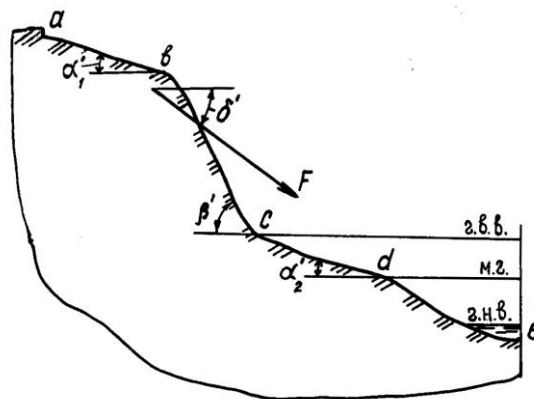


Рис. 1. Профиль коренного берега реки

бичевник cd (нижний склон) и речное дно de [7]. Такой контур можно аппроксимировать отрезками прямых и кривыми линиями. Обозначены также: α'_1, α'_2 – углы наклона верхнего и нижнего склона к горизонту; β' – угол наклона обрыва к горизонту; \vec{F} – вектор усилий, приходящийся на 1 м длины анкерной балки; δ' – угол наклона вектора усилий к горизонту; г. в. в. – горизонт высоких вод; м. г. – меженный горизонт; г. н. в. – горизонт низких вод. Для левого берега русла р. Красивая Меча углы наклона верхнего и нижнего склонов, а также обрыва имеют значения: $\alpha'_1 \approx \alpha'_2 = 9^\circ$, $\beta' = 34^\circ$ [7].

Усилия, передаваемые тросами от наплавных сооружений к анкерным балкам, должны быть восприняты откосом и уравновешены напряжениями, возникающими при его деформации. До приложения к откосу вектора усилий \vec{F} он находится в состоянии устойчивого равновесия; дополнительное поле напряжений в грунте, вызванное силами \vec{F} , при правильном проектировании анкерной опоры не должно нарушать этого равновесия.

В статье предлагается математическая модель и алгоритм расчета дополнительного поля напряжений в грунте откоса, вызванного усилиями, передаваемыми стальными канатами от наплавных сооружений к жестким анкерным балкам, заглубленным в откос параллельно руслу реки.

Математическая формулировка задачи. Известно, что при действии на твердое деформируемое тело сосредоточенной силы поле напряжений локализуется в окрестности точки приложения этой силы. Поэтому если точка приложения силы \vec{F} находится в верхней части профиля откоса, как показано на рис. 1, то дно реки можно не рассматривать. Повернув профиль откоса против часовой стрелки на угол $\alpha'_1 \approx \alpha'_2$ так, чтобы верхний и нижний склоны стали горизонтальными, приходим к расчетной схеме, представленной на рис. 2, в которой угол наклона обрыва к оси абсцисс равен $\beta = \beta' - \alpha'_1$, угол наклона вектора усилий \vec{F} – $\delta = \delta' - \alpha'_1$. Учитывая принятое допущение относительно модели деформирования грунта откоса линейно-упругой средой вплоть до перехода в предельное состояние, приводим поставленную задачу к задаче о плоской деформации упругой полуплоскости с уступом, в произвольной внутренней точке которой приложена сосредоточенная сила.

На полуплоскость с уступом высотой h , имеющим угол наклона $\beta = \pi c$ ($c = p/q$, p, q – целые числа, $p < q$), в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ действует сосредоточенная сила $\vec{F} = F_x + iF_y$ (i – мнимая

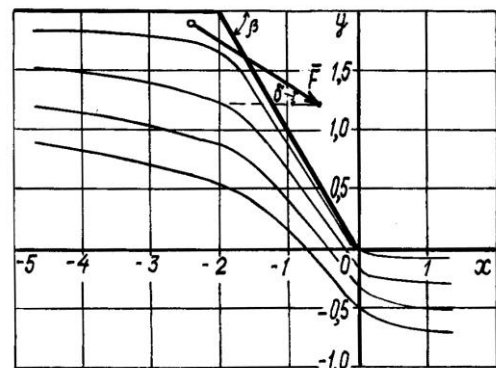


Рис. 2. Расчетная схема

единица), как показано на рис. 2. Наружные грани полуплоскости с уступом свободны от нагрузок. Материал полуплоскости характеризуют модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Требуется найти распределение напряжений в полуплоскости с уступом.

Решение этой задачи, очевидно, будет справедливым и при действии на упругое полупространство с террасой нагрузки \vec{F} , равномерно распределенной вдоль прямой, перпендикулярной к плоскости xOy .

Учитывая приведенные выше числовые значения углов α'_1 и β' , для типичного угла наклона уступа получаем $\beta = 25^\circ$. Полагая, что углы β могут изменяться от 10° до 60° , для числовых значений p и q получаем: $p = 1$; $q = 3, 4, \dots, 18$.

Заметим, что на рис. 2 изображено зеркальное отражение верхней полуплоскости с уступом относительно оси x , поскольку в приводимом ниже решении используем конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ верхней полуплоскости с уступом на верхнюю полуплоскость ζ . Кроме границы уступа (сплошные жирные линии в плоскости xOy), на рис. 2 показаны несколько координатных линий $\eta = \text{const}$ (сплошные тонкие линии) криволинейной системы координат.

Метод решения. Задача имеет точное аналитическое решение, которое можно построить с помощью интегралов Коши [6].

Конформно отобразим область z уступа на полуплоскость ζ посредством функции $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = \frac{h}{\pi} \left[\frac{s^p}{c(1-s^q)} + \sum_{n=0}^{q-1} t_n^{p-q} \ln \left(1 - \frac{s}{t_n} \right) \right], \quad (1)$$

где s – функция, отображающая угловую область на полуплоскость,
 $s = (1 - \zeta^{-1})^{1/q}$, $\zeta > 0$;

t_n – корни n -й степени из единицы,

$$t_n = \exp(2n\pi i/q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, q-1.$$

Функция (1) впервые была получена с помощью формулы Кристоффеля – Шварца для прямолинейных многоугольников в работе [3], однако в выражение этой функции вкралась неточность. Позднее, на базе работы [3], функция (1) была построена заново [4], и неточность устранена.

Отображение (1) можно рассматривать как введение на плоскости z криволинейной системы координат $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$:

$$z = x + iy; \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad \zeta = \Omega(z); \quad \xi = \text{Re}\Omega(z); \quad \eta = \text{Im}\Omega(z),$$

где $\Omega(z)$ – функция, обратная $\omega(\zeta)$.

Аналитическое выражение для $\Omega(z)$ в элементарных функциях найти не удастся, поэтому для числовых расчетов необходимо представить функцию $\Omega(z)$ в табличной форме.

В целом задачу можно считать решенной, если будут найдены два

комплексных потенциала $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, удовлетворяющие граничному условию на свободной поверхности уступа при $\eta = 0$.

В плоскости ζ точке z_0 приложения силы \bar{F} соответствует $\zeta_0 = \Omega(z_0)$, а самой силе – выражение [6]

$$P_\zeta = F_\xi + iF_\eta = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} (F_x + iF_y). \quad (2)$$

Далее индекс ζ в обозначении силы P опускаем.

Решение сформулированной задачи имеет вид [5]

$$\Phi(\zeta) = - \left(\frac{k}{\omega(\zeta) - \bar{z}_0} + \frac{1}{\omega(\zeta) - z_0} \right) P + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} \bar{P}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) = & -\bar{z}_0 \left[\frac{k}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} + \frac{1}{(\omega(\zeta) - z_0)^2} \right] P + \\ & + \left[\frac{k}{\omega(\zeta) - z_0} + \left(\frac{\omega(\zeta) - z_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} + \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)\omega(\zeta)}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^3} \right) \right] \bar{P}, \end{aligned} \quad (4)$$

где параметр $k = 3 - 4\nu$.

Нормальные σ_ξ , σ_η и касательное $\tau_{\xi\eta}$ напряжения в криволинейной системе координат (ξ, η) находят по формулам Колосова – Мусхелишвили

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi'(\zeta)}]; \quad (5)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = \frac{2}{\omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \omega'(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)} \right], \quad (6)$$

где верхние штрихи справа от символа означают дифференцирование по аргументу, а тонкая черта над символом – комплексно-сопряженную функцию.

Распределение напряжений. Введем вспомогательные функции:

$$A(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}; \quad B(\zeta) = \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \omega'(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)} \right]. \quad (7)$$

Напряженное состояние уступа выражают через эти функции:

$$\sigma_\xi = \operatorname{Re}[A(\zeta) - B(\zeta)]; \quad \sigma_\eta = \operatorname{Re}[A(\zeta) + B(\zeta)]; \quad \tau_{\xi\eta} = \operatorname{Im}B(\zeta). \quad (8)$$

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили, можно выразить главные напряжения σ_1 , σ_2 , максимальное касательное напряжение τ_{\max} , интенсивность нормальных напряжений σ_i , октаэдрические нормальные σ_{oct} и касательные τ_{oct} напряжения через потенциалы $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$:

$$\sigma_1 = A(\zeta) + |B(\zeta)|; \quad \sigma_2 = A(\zeta) - |B(\zeta)|; \quad \tau_{\max} = |B(\zeta)|;$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2};$$

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i. \quad (9)$$

Третье главное напряжение определяется как $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$.

Видно, что поля напряжений σ_i и τ_{oct} подобны друг другу; после подстановки $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ в выражение для σ_i можно убедиться, что поля напряжений σ_i и τ_{max} весьма близки между собой, а поле σ_{oct} подобно полю σ_3 .

Для построения любого из полей напряжений необходимо на полуплоскости $\zeta > 0$ ввести сетку прямоугольных координат ξ_k, η_m , которую посредством функции (1) преобразовать в сетку криволинейных координат $x_{k,m} = \text{Re}\omega(\xi_k, \eta_m)$; $y_{k,m} = \text{Im}\omega(\xi_k, \eta_m)$ на уступе. В узлах сетки ξ_k, η_m на полуплоскости $\zeta > 0$ по выражениям (3), (4) можно вычислить потенциалы Φ, Ψ , а по выражениям (8), (9) – все напряжения. Эти напряжения действуют в узлах сетки $x_{k,m}, y_{k,m}$ криволинейных координат.

Критерий прочности. В механике грунтов для оценки предельных состояний оснований сооружений используют критерий прочности Кулона – Мора с прямолинейной огибающей больших кругов Мора [1, 2, 8–10]. Физический смысл этого критерия состоит в том, что если на какой-либо площадке с нормалью n , проходящей через рассматриваемую точку грунта, касательное напряжение τ_n достигает предельного значения, определяемого зависимостью

$$\tau_n = c - \text{tg}(\varphi) \sigma_n, \quad (10)$$

где c – сцепление (адгезия);

φ – угол внутреннего трения в грунте;

σ_n – нормальное напряжение, действующее на площадке с нормалью n , то на этой площадке возникает скольжение частиц грунта (срез или скол).

В отличие от механики грунтов, зависимость (10) и все вытекающие из нее выражения были записаны ниже для обычного в механике деформируемого твердого тела правила знаков для нормальных напряжений: растягивающим напряжениям присваивают знак плюс.

Многочисленные опыты по сдвигу грунтов в полевых и лабораторных условиях подтверждают прямолинейность огибающих больших кругов Мора для песчаных (до давлений 10 МПа) и глинистых грунтов (до давлений 125 кПа) [1].

В отечественной литературе по механике грунтов критерий прочности Кулона – Мора с прямолинейной огибающей рекомендуют использовать до давлений (0,3 ... 0,5) МПа [9], (0,5 ... 0,7) МПа [10].

Исходя из предположения о прямолинейности огибающей больших кругов Мора и выражая τ_n, σ_n через наибольшее и наименьшее главные напряжения σ_1, σ_3 , можно получить следующее выражение для критерия прочности Кулона – Мора:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sin\varphi \left| \sigma_1 + \sigma_3 - 2\tilde{c}\operatorname{ctg}\varphi \right|. \quad (11)$$

В левой части выражения (11) стоит удвоенное значение радиуса большого круга Мора $R_M = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3)$ для известного напряженного состояния (НС) в данной точке, в правой – модуль удвоенного значения радиуса большого круга Мора для предельного состояния грунта:

$$\lim R_M = 0,5 \left| \sigma_1 + \sigma_3 - 2c \operatorname{ctg}\varphi \right|,$$

умноженного на синус угла внутреннего трения.

Из условия (11) следует, что если для напряженного состояния, характеризуемого главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, большой круг Мора R_M не пересекает огибающую предельных больших кругов Мора и не касается ее, то напряженное состояние является допредельным. В противном случае оно предельное и запредельное: на площадке с нормалью n возникает скольжение частиц грунта (срез или скол).

Пример расчета. Введем в рассмотрение показатель опасности напряженного состояния $k_\varphi = 100 R_M / \lim R_M$, с помощью которого можно определить степень близости данного напряженного состояния, характеризуемого главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, к предельному, и найдем его распределение в частном конкретном случае.

Уступ высотой $h = 2$ м имеет угол наклона грани $\pi c = \pi/4$ ($p = 1, q = 4$), сосредоточенная сила – компоненты $F_x = 10$ кН, $F_y = 5$ кН; координаты точки приложения силы: $x_0 = -2,382$ м, $y_0 = -1,761$ м.

Грунты, слагающие береговой откос, представляют собой суглинки со следующими инженерно-геологическими характеристиками: модуль деформации $E = 19$ МПа; коэффициент бокового давления $\xi = 0,35$; угол внутреннего трения $\varphi = 25^\circ$; сцепление $c = 28$ кПа.

Коэффициент Пуассона ν определяем по известной формуле механики грунтов: $\nu = \xi / (1 + \xi) = 0,26$.

Точке приложения силы $z_0 = -2,382 - 1,761i$ на плоскости ζ соответствует точка $\zeta_0 = -0,05 + 0,5i$; преобразованной сосредоточенной силе $F_z = \bar{F} / (2\pi(1 + k)) = 0,538 + 0,269i$ – сила $P_\zeta = 0,578 + 0,166i$.

Для оценки формы и размеров зоны возможного разрушения уступа под действием силы \bar{F} будем полагать, что деформирование грунта уступа вплоть до достижения предельного состояния в какой-либо его части проис-

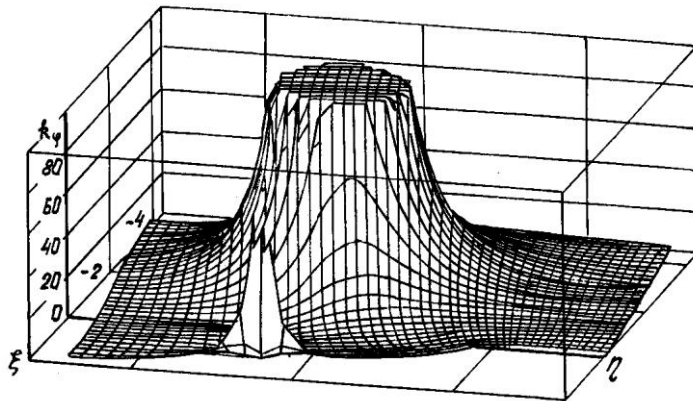


Рис. 3. Поверхность показателей опасности НС

ходит по закону Гука, а после достижения предельного состояния в соответствии с критерием Кулона – Мора (11) остается неизменным.

Полученная оценка несколько завышает размеры зоны предельных состояний грунта, поскольку она не учитывает энергию, затрачиваемую на деформирование грунта после перехода его в предельное состояние.

Расчеты выполняют по формулам (1) – (4), (7), (8), (11).

На рис. 3 в прямоугольной системе координат ξ, η представлен усеченный трехмерный график распределения показателей опасности напряженного состояния $k_{\varphi} = 100 R_M / \lim R_M$ в уступе. Оси ξ, η расположены в плоскости расчетной области уступа по рис. 2, ось z направлена перпендикулярно к расчетной плоскости. По осям ξ, η отложены расстояния (м), по оси z – показатель k_{φ} (%). В тех точках уступа, где показатель k_{φ} превышает 100 %, он приравнен к этой величине.

На рис. 4 представлена карта уровней (линий равных значений) показателей опасности напряженного состояния k_{φ} в уступе, построенная в

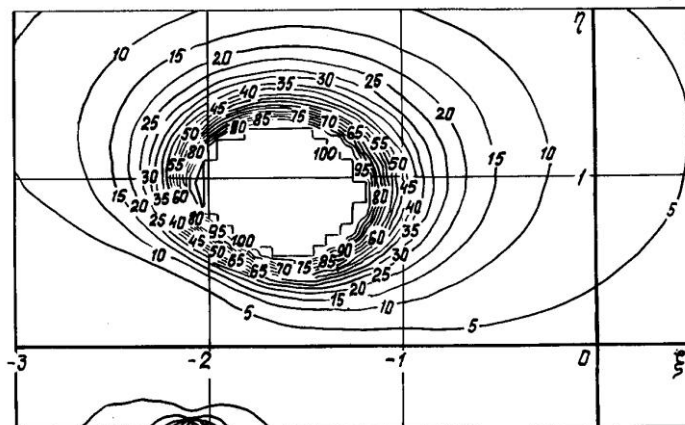


Рис. 4. Линии равных показателей опасности НС

плоскости ξ, η . Линии равных значений имеют отметки в процентах. Карта уровней дает возможность оценить расположение и размеры зоны влияния сосредоточенной силы на напряженное состояние уступа.

Совместное рассмотрение рис. 3 и 4 показывает, что реакция анкера существенно влияет на напряженное состояние уступа в окрестности точки ее приложения, вызывая разрушение грунта в непосредственной близости к точке приложения, а также концентрацию напряжений в окрестности верхней угловой точки уступа. Зона влияния реакции анкера вытянута в направлении действия силы. Размеры этой зоны зависят от модуля силы, координат точки ее приложения, геометрии уступа (высоты и угла наклона обрыва), а также коэффициента Пуассона грунта уступа. Как видно из рис. 4, зона разрушения грунта имеет форму овала с большой осью, равной 1 м, и малой, равной 0,75 м. Площадь зоны разрушения в примере составляет около 0,6 м².

Таким образом, в работе показано, каким образом представленное решение можно использовать для анализа полей напряжений и оценки локальной прочности береговых откосов, в которых размещаются горизонтально протяженные опоры (анкеры) наплавных гидротехнических и других инженерных сооружений. Оно может быть использовано как тестовая задача при отладке численных решений, а также как составная часть пакетов компьютерных программ для автоматизированных расчетов и оптимизации конструктивных решений опор, заглубленных в откосы.

В практических расчетах ось анкерной балки и вектор силы \vec{F} могут быть наклонены к бровке обрыва. В этом случае оценку напряженного состояния грунта около балки можно выполнить следующим образом.

Разложим вектор \vec{F} на две составляющие: \vec{F}_1 – перпендикулярную бровке откоса и \vec{F}_2 – параллельную бровке откоса, причем $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Используя представленный алгоритм, построим НС в плоскости, перпендикулярной бровке откоса при действии силы \vec{F}_1 ; используя решение задачи Мелана для упругой полуплоскости без уступа, построим НС в плоскости, параллельной бровке откоса при действии силы \vec{F}_2 . Наложение построенных НС дает искомую оценку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бишон А.У. Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта // Механика. Новое в зарубежной науке. Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975. – С. 7–75.
2. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высш. шк., 1985. – 352 с.
3. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: ИЛ, 1963. – 406с.

4. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям. – Киев: Наукова думка, 1970. – 252 с.
5. Мильяев А.С. Действие сосредоточенной силы внутри упругой полуплоскости с уступом // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 5. – С. 834–841.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Саваренский Ф.П. Инженерная геология. – М.; Л.: Гос. объедин. науч.-техн. изд-во, 1939. – 487с.
8. СНиП 2.02.01–83. Основания зданий и сооружений / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 1999. – 48 с.
9. Ухов С.Б. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты / С.Б. Ухов, В.В. Семенов, В.В. Знаменский и др. – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 527 с.
10. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Стройиздат, 1963. – 636 с.

С.-Петербургская лесотехническая
академия

Поступила 01.04.02

A.S. Milyaev

Stressed State of Bank Slope under Anchor Bearing Pressure

Mathematical model and algorithm of calculating additional pressure field in the slope soil caused by forces transferred by cables' from floating structures to rigid anchor beams, buried into a slope parallelly to a river bed are offered. The example of calculating a form and zone of possible slope soil destruction under the influence of concentrated force is given.
