УДК 674.8

В.И. Малыгин, А.Е. Смаглов

Малыгин Владимир Иванович родился в 1952 г., окончил в 1979 г. Университет Дружбы народов им. П. Лумумбы, доктор технических наук, профессор, действительный член АИН РФ, проректор по научной работе Севмашвтуза – филиала СПб. ГМТУ. Имеет более 100 научных работ в области математического моделирования физических процессов при резании.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОФИЗИКИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ДЕРЕВОРЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

Разработана методика оценки точности вычисления полей температур при представлении решения уравнения теплопроводности в тригонометрических и экспоненциальных рядах.

Ключевые слова: точность вычислений, дереворежущий инструмент, уравнения теплопроводности, оптимальность конструкции, математическая модель.

Задача выбора оптимальной конструкции дереворежущего инструмента на стадии проектирования как самого инструмента, так и технологического процесса является весьма актуальной. Это обусловлено необходимостью обеспечения качества изделий деревообработки и эффективностью использования дереворежущего инструмента. Особую значимость при этом приобретает изучение тепловых процессов, протекающих в инструменте. В процессе деревообработки тепло, образующееся при резании материалов с низкой теплопроводностью, практически в полном объеме идет на нагрев инструмента. Поэтому решение задач, связанных с учетом температурных деформаций, изменением режущих свойств, представляет научный интерес. Одним из путей их решения является создание математической модели, позволяющей проводить качественную оценку конструкции инструмента на стадии проектирования.

Рассматривая математическое моделирование тепловых полей в режущем инструменте, прежде всего, следует подобрать размерность задачи таким образом, чтобы она наиболее точно описывала протекающие в нем процессы. В качестве модели формы сборного инструмента целесообразно принять тела ограниченных размеров, поскольку необходимо учитывать теплообмен по всем поверхностям режущего ножа. Моделирование полуограниченными телами здесь будет не совсем корректно, так как теплообмен в стыке существенно отличается от теплообмена в сплошной среде. Особенностью решения задачи теплопроводности для ограниченных тел является то, что оно представляется в виде рядов, например тригонометрических. Таким образом, точность практических вычислений будет определяться числом членов частичного ряда, удерживаемых при расчете. Можно показать, что число членов ряда, которые необходимо удерживать для обеспечения заданной точности, зависит от вида функции, на основе которой построен ряд. Для этого сравним два ряда: построенных на основе тригонометрических и на основе экспоненциальных функций. Первый образуется при решении дифференциального уравнения теплопроводности в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям либо лежит в основе интегральных преобразований. Второй наиболее простой способ – решение в виде экспоненциального ряда и его конструирование методом источников [2]. Во втором случае решение получают с помощью функций влияния, которые составляют с учетом воздействия каждого источника. Это воздействие может быть представлено как в виде экспоненциальной зависимости[1], так и в виде ряда Фурье, что дает основу для сравнения.

Рассмотрим некоторые особенности исследуемых рядов. Получение решения в экспоненциальных рядах основано на использовании метода источников [2]. Что касается тригонометрических рядов, то по своей природе они ориентированы на описание периодических процессов. Использование тригонометрических рядов для описания непериодических процессов, в том числе и распространения теплоты, возможно, и не составляет особого труда, однако физический смысл при этом утрачивается. Тем не менее, тригонометрические ряды могут быть получены для задач с весьма сложными краевыми условиями. Экспоненциальные ряды этого достоинства лишены – даже для сравнительно простых краевых условий (например для задачи, рассматриваемой в данной работе) решение становится весьма громоздким, а для более сложных его не удается найти.

Посмотрим, как связана величина n-го члена ряда с его номером для обоих случаев. Для экспоненциального ряда, полученного методом источников, величина члена ряда убывает пропорционально экспоненте квадрата его номера, для тригонометрического – пропорционально произведению экспоненты квадрата номера на его синус (косинус). Казалось бы, если члены тригонометрического ряда убывают быстрее, то и сходиться он должен раньше, однако это не так. Выясним, как связана величина члена ряда с координатой. В экспоненциальном ряду связь с координатой такая же, как и с номером – пропорциональность с экспонентой квадрата координаты, в тригонометрическом – с синусом (косинусом) координаты. Если фундаментальное решение дифференциального уравнения теплопроводности есть экспоненциальная связь температуры с квадратом расстояния, то становится очевидным, что тригонометрические ряды лишь приближают то решение, которое экспоненциальные ряды дают сразу и точно. Однако сравнение будет неточным, если не учитывать связь величины члена ряда со временем. Если для сходимости экспоненциального ряда эта связь не имеет большого значения в силу его знакопостоянности, то в знакопеременном тригономет-

[1] Это ничто иное, как фундаментальное решение уравнения теплопроводности для мгновенного точечного источника, действовавшего в неограниченном пространстве.

рическом ряду время определяет «размах колебаний» членов ряда. Чем меньше время, тем больше размах (пропорционально exp(– t)). Отсюда следует, что для получения результата с заданной степенью точности в тригонометрическом ряду нужно удерживать существенно больше членов, по крайней мере, для малых промежутков времени. Определению числа членов в том и другом случае и посвящена данная работа.

Рассмотрим задачу в относительно простой постановке, которая позволит проиллюстрировать особенности обоих типов решений. Исследуем распространение тепла в стержне при заданных температурах на его концах (первая краевая задача). Имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при следующих граничных и начальном условиях:

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t); \quad u\big|_{x=l} = \psi_2(t);$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $u(x, t)$ – температура в точке с координатой x в момент времени t; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

Для того чтобы показать различную сходимость исследуемых рядов, достаточно рассмотреть переходный процесс при стационарных краевых условиях, в то время как нестационарные условия затрудняют проявление особенностей их поведения. Примем следующие значения краевых функций: единичная температура на левом конце стержня $\psi_1(t) = 1$; нулевая температура на правом конце стержня $\psi_2(t) = 0$; нулевая начальная температура $\varphi(x) = 0$. В этом случае решение может быть получено в следующем виде:

в тригонометрических рядах [1]

$$u(x,t) = V(x,t) - \frac{2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n}\right)}{\pi}; \qquad (1)$$

в экспоненциальных рядах [2]

$$u(x,t) = V(x,t) - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1(+2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) l\pi + \operatorname{erf}\left(\frac{1(-l + 2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) x\pi + \right.\right.$$

$$+ \operatorname{erf}\left(\frac{1(-l + 2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) l\pi + 2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1(+2l\,n-x)^2}{4t\alpha^2} \right)} \alpha\sqrt{\pi}\sqrt{t} +$$

$$+ 2n\operatorname{erf}\left(\frac{1(+2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) l\pi - x\operatorname{erf}\left(\frac{1(+2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) \pi -$$

$$- 2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1(-l+2l\,n-x)^2}{4t\alpha^2} \right)} \alpha\sqrt{\pi}\sqrt{t} - 2\operatorname{erf}\left(\frac{1(-l + 2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) nl\pi -$$

$$\left.\left. - 2\operatorname{erf}\left(\frac{1(2l\,n - x)}{2\sqrt{t}\;\alpha} \right) \pi\,l \right) / (\pi\,l) \right), \qquad (2)$$

где $V(x, t) = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)x/l$ – «квазистационарная» температура, которая в нашем случае будет отражать поле температур после установления теплового равновесия.

Как было сказано выше, точность вычислений по формулам (1) и (2) сильно зависит от времени в самом начале переходного процесса. Определим величину этого промежутка времени. При реальных процессах циклического резания (фрезерование, пиление дисковыми пилами) продолжительность цикла напрямую зависит от частоты вращения шпинделя станка. Так, при частоте вращения n = 1000 об/мин цикл нагружения составляет 0,06 с, при n = 3000 об/мин – 0,02 с, при n = 6000 об/мин – 0,01 с. Необходимо отметить, что длительность теплового импульса составляет лишь незначительную часть цикла нагружения. Казалось бы, решать уравнение теплопроводности лучше для мгновенно действующего источника, в этом случае решения (1) и (2) были бы значительно проще. Это было возможно, если бы имелся всего один цикл нагружения. На практике число циклов достаточно велико и температура режущей кромки устанавливается около некоторой средней величины, которая в нашем случае соответствует квазистационарной температуре. Таким образом, моделирование реального теплового поля первой краевой задачей предпочтительней, чем исследование распространения мгновенного теплового импульса. Кроме того, решения (1) и (2) могут быть легко модернизированы для более сложных краевых условий, чем те, которые отражены в данной работе.

Рассмотрим зависимость точности вычислений от числа удерживаемых членов ряда.

На рис. 1 показан характер изменения температуры во времени для двух видов решений, представленных в экспоненциальных и тригонометрических рядах. Для тригонометрических рядов амплитуда колебаний

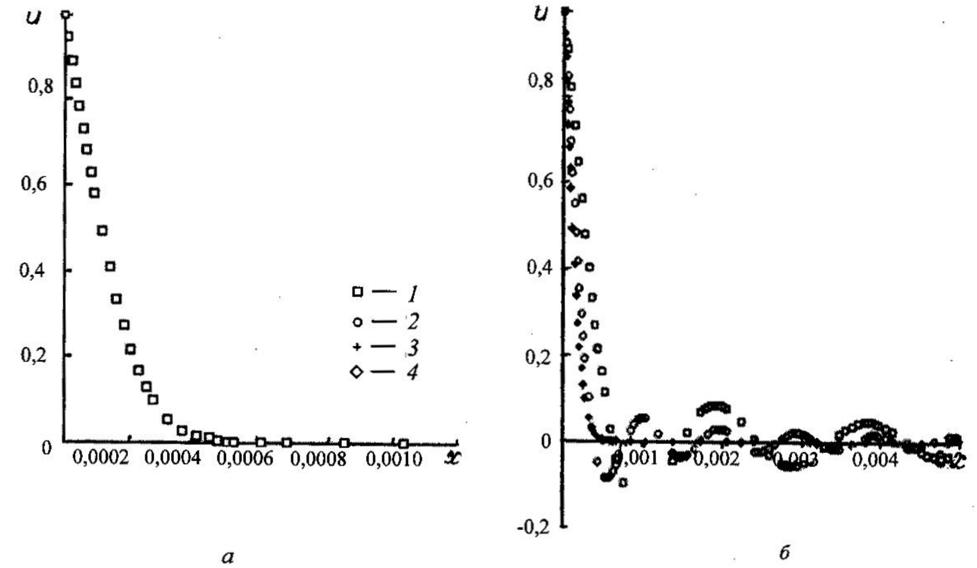

Рис. 1. Распределение температуры в стержне для различных моментов времени при решении в экспоненциальных (*а*) и тригонометрических (*б*) рядах (для числа членов ряда n = 10): *1* – 0,001 с, *2* – 0,005, *3* – 0,010, *4* – 0,020 с

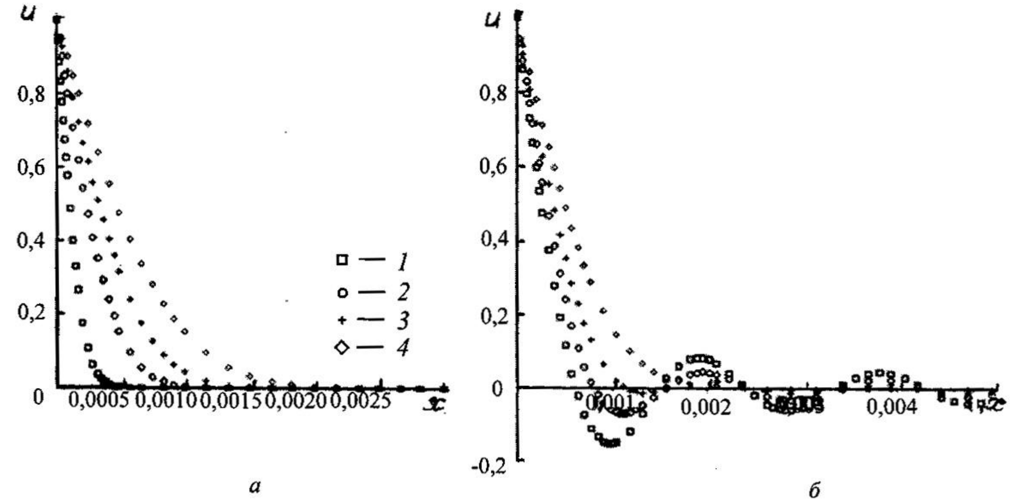

Рис. 2. Распределение температуры в стержне в момент времени t = 0,001 с для различного числа удерживаемых членов ряда при решении в экспоненциальных (*а*)(*1* – n = 5; *2* – 10; *3* – 25; *4* – 50) и тригонометрических (*б*) (*1* – n = 10; *2* – 20; *3* – 50; *4* –100) рядах

уменьшается с ростом времени. Практический интерес представляют именно малые промежутки времени.

На рис. 2 показана зависимость температуры стержня от числа удерживаемых членов ряда n. Точность вычисления по решению в экспоненциальных рядах для малых промежутков времени практически не зависит от n, поэтому для практических расчетов в данной задаче можно принять $n = 5$. Для тригонометрических рядов отклонения становятся сравнительно малыми только при $n > 50$. Таким образом, непосредственные вычисления подтверждают выше сказанное о том, что для тригонометрических рядов существует сильная зависимость между точностью вычислений и промежутком времени при постоянном числе удерживаемых членов ряда n.

Нами предложена следующая методика выбора числа удерживаемых членов ряда при проведении расчетов в тригонометрических рядах. Допустим, что для данной задачи существует и известно решение как в тригонометрических, так и в экспоненциальных рядах. Как показано выше, точность вычислений по решениям в экспоненциальных рядах для быстротекущих процессов слабо зависит от числа удерживаемых членов ряда. Зададимся некоторым числом удерживаемых членов экспоненциального ряда n, при котором будем считать найденное решение точным (в нашем примере достаточно было принять $n = 5 \dots 10$). Тогда относительную погрешность вычислений в тригонометрических рядах определим по формуле

$$\delta(x,t) = \frac{\left| u_{\exp}(x,t) - u_{trig}(x,t,m) \right|}{u_{\exp}(x,t)}, \tag{3}$$

где $u_{\exp}(x, t)$ – температура в точке x в момент времени t, определенная по решению в экспоненциальных рядах;

$u_{\mathrm{trig}}(x, t, m)$ – температура в точке x в момент времени t, определенная по решению в тригонометрических рядах для числа удерживаемых членов ряда m.

Отсюда, задаваясь различными значениями m, можно подобрать его таким, чтобы удовлетворить требуемой точности вычислений в соответствии с формулой (3)*.

Выводы

1. При практических вычислениях для быстротекущих процессов по решениям дифференциального уравнения теплопроводности экспоненциальный ряд сходится быстрее, чем тригонометрический.

2. Если постановка задачи допускает получение решений в тригонометрических и в экспоненциальных рядах, то в силу существенно более быстрой

---

* На самом деле, формула (3) дает несколько завышенные значения (что идет в запас), поскольку частичная сумма исследуемого экспоненциального ряда меньше полной.

сходимости экспоненциальных рядов может быть получена оценка точности вычислений по решению в тригонометрических рядах по формуле (3).

3. Оценку точности вычислений, проведенную по изложенной методике, можно экстраполировать и на задачи, для которых нет решений в экспоненциальных рядах, однако это остается пока недоказанным. Основанием для подобного утверждения служит то, что для различных краевых условий форма решения в тригонометрических рядах остается практически неизменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков, Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков [и др.]. – М.: Высш. шк., 1970.

2. *Положий, Г.Н.* Уравнения математической физики [Текст] / Г.Н. Положий. – М.: Высш. шк., 1964.

Севмашвтуз

Поступила 20.04.04

V.I. Malygin, A.E. Smaglov

Assessment of Computing Accuracy in Thermal Physics Tasks when Designing Wood-cutting Tool

Method of computing accuracy assessment of temperature fields when presenting solution of thermal conductivity equation in trigonometric and exponential sequences is developed.