УДК 674.05:621.9

В.И. Малыгин, А.Е. Смаглов

Малыгин Владимир Иванович родился в 1952 г., окончил Университет Дружбы народов им. П. Лумумбы, доктор технических наук, профессор, действительный член АИН РФ, проректор по научной работе Севмашвтуза. Имеет более 110 научных работ в области математического моделирования физических процессов при резании.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОФИЗИКИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ДЕРЕВОРЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

Предложена методика оценки точности вычисления температуры при решении в тригонометрических рядах, для которых имеется решение в экспоненциальных рядах.

дереворежущий инструмент, сборный, точность вычислений, математическая модель, тепловое состояние.

Задача выбора оптимальной конструкции дереворежущего инструмента на стадии проектирования как технологического процесса, так и самого инструмента является актуальной. Это обусловлено необходимостью обеспечения высокого качества изделий деревообработки и эффективностью использования дереворежущего инструмента. Основные показатели эффективности, прежде всего стойкость, определяются физическими процессами, происходящими при резании. Особое значение при этом приобретает вопрос изучения тепловых процессов, протекающих в инструменте. В деревообработке тепло, образующееся при резании материалов с низкой теплопроводностью, практически в полном объеме идет на нагрев инструмента. Поэтому, решение вопросов, связанных с учетом температурных деформаций, представляет научный и практический интерес. Один из путей его решения – создание математической модели, позволяющей проводить качественную оценку конструкции инструмента на стадии проектирования.

Рассматривая вопросы математического моделирования тепловых полей в режущем инструменте, прежде всего следует подобрать размерность задачи таким образом, чтобы она наиболее точно описывала протекающие в нем процессы. Для сборного инструмента в качестве модели формы инструмента целесообразно принимать тела ограниченных размеров, поскольку необходимо учитывать теплообмен по всем граням режущей пластины. Моделирование полуограниченными телами здесь будет не совсем корректно, так как теплообмен в стыке существенно отличается от теплообмена в сплошном теле. Особенность состоит в том, что решения задач теплопроводности для ограниченных тел представляют в виде рядов, например тригонометрических и др. Таким образом, точность вычислений определяется числом членов частичного ряда, удерживаемых при расчете.

Можно показать, что число членов ряда, которые необходимо удерживать для обеспечения заданной точности, зависит от вида функции, на основе которой построен ряд.

Для этого сравним два ряда, построенных на основе тригонометрических и экспоненциальных функций. Первые образуются при решении дифференциального уравнения теплопроводности различными способами, в которых искомое решение изначально ищется либо в виде ряда Фурье, либо они лежат в основе интегральных преобразований. Наиболее простой способ получения решения в виде экспоненциального ряда – конструирование его методом источников [2]. В этом случае используют функции влияния, которые, в свою очередь, составляются с учетом воздействия каждого источника. Это воздействие может быть представлено как в виде экспоненциальной зависимости*, так и в виде ряда Фурье, что дает прекрасную основу для сравнения.

Рассмотрим некоторые особенности исследуемых рядов. Получение решения в экспоненциальных рядах основано на использовании метода источников [2], что придает ему ясный физический смысл. Что касается тригонометрических рядов, то по своей природе они ориентированы на описание периодических процессов. Использование их для описания непериодических процессов, в том числе и распространения тепла, возможно, и не составляет особого труда, однако физический смысл при этом утрачивается. Тем не менее, тригонометрические ряды имеют весьма существенное достоинство, обусловливающее их широкое применение, – решение в них может быть получено для задач с весьма сложными краевыми условиями. К сожалению, у экспоненциальных рядов это отсутствует – даже для сравнительно простых краевых условий (например для задачи, рассматриваемой в данной работе) решение становится весьма громоздким, для более сложных такового найти не удается.

Рассмотрим, как связана величина n-го члена ряда с его номером для обоих случаев. Для экспоненциального ряда, полученого методом источников, величина члена ряда убывает пропорционально экспоненте квадрата его номера, для тригонометрического – пропорционально произведению экспоненты квадрата номера на синус (косинус) номера. Казалось бы, раз члены тригонометрического ряда убывают быстрее, то и сходиться он должен раньше. Однако это не так.

Выясним, как связана величина члена ряда с координатой. В экспоненциальном ряду связь с координатой такая же, как с номером – пропорциональность с экспонентой квадрата координаты, в тригонометрическом –

---

* Это фундаментальное решение уравнения теплопроводности для мгновенного точечного источника, действовавшего в неограниченном пространстве.

с синусом (косинусом) координаты. Так как фундаментальное решение дифференциального уравнения теплопроводности есть именно экспоненциальная связь температуры с квадратом расстояния, то становится очевидным, что тригонометрические ряды лишь приближают то решение, которое экспоненциальные ряды дают сразу и точно. Однако такое сравнение будет неточным, если не учитывать связь величины члена ряда со временем. Если для сходимости экспоненциального ряда эта связь не имеет большого значения в силу его знакопостоянства, то в знакопеременном тригонометрическом ряду время определяет «размах колебаний» членов ряда. Чем меньше время, тем больше размах (пропорционально exp$(-t)$). Отсюда следует, что для получения результата с заданной степенью точности в тригонометрическом ряду нужно удерживать существенно больше членов, по крайней мере, для малых промежутков времени. Определению числа членов в том и другом случае и посвящена данная работа.

Рассмотрим задачу в следующей относительно простой постановке, которая позволит проиллюстрировать особенности обоих типов решений. Исследуется распространение тепла в стержне при заданных температурах на его концах (первая краевая задача). Таким образом, имеем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничных $u\big|_{x=0} = \psi_1(t)$, $u\big|_{x=l} = \psi_2(t)$ и начальном $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ условиях.

Здесь $u(x,t)$ – температура в точке с координатой x в момент времени t;

$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

Для того, чтобы показать различную сходимость исследуемых рядов, достаточно рассмотреть переходный процесс при стационарных краевых условиях, так как нестационарные условия затрудняют проявление особенностей поведения рядов. Примем следующие значения краевых функций: единичная температура на левом конце стержня $\psi_1(t)=1$, нулевая температура на правом конце $\psi_2(t) = 0$, нулевая начальная температура $\varphi(x) = 0$. В этом случае решение, выраженное в тригонометрических рядах, может быть получено в виде [1]

$$u(x,\, t) = V(x,\, t) - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n} \right] / \pi, \qquad (1)$$

решение, полученное в экспоненциальных рядах [1]:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = V(x,t) - \Bigg[\sum_{n=-\infty}^{\infty} & \operatorname{erf}\left(\frac{1(l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) l\pi + \operatorname{erf}\left(\frac{1(-l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) l\pi + \\
& + \operatorname{erf}\left(\frac{1(-l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) l\pi + 2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1(l+2l\,n-x)^2}{4\alpha^2 t}\right)} \alpha\sqrt{\pi}\sqrt{t} + 2n\operatorname{erf}\left(\frac{1(l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) l\pi - \\
& - x\operatorname{erf}\left(\frac{1(l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) \pi - 2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1(-l+2l\,n-x)^2}{4t\alpha^2}\right)} \alpha\sqrt{\pi}\sqrt{t} - 2\operatorname{erf}\left(\frac{1(-l+2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) nl\pi - \\
& - 2\operatorname{erf}\left(\frac{1(2l\,n-x)}{2\sqrt{t}\,\alpha}\right) \pi l \Bigg) / (2\pi l) \Bigg],
\end{aligned} \qquad (2)
$$

где $V(x, t) = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)x/l$ – «квазистационарная» температура, которая будет отражать поле температур после установления теплового равновесия.

Как уже было сказано выше, точность вычислений по формулам (1) и (2) существенно зависит от времени в самом начале переходного процесса. Определимся с величиной этого промежутка времени.

При реальных процессах циклического резания (фрезерование, пиление дисковыми пилами) продолжительность цикла напрямую зависит от скорости вращения шпинделя станка. Так, при частоте вращения n = 1000; 3000; 6000 об/мин цикл нагружения соответственно составляет 0,06; 0,02; 0,01 с.

Необходимо отметить, что длительность теплового импульса составляет лишь незначительную часть цикла нагружения. Казалось бы, решать уравнение теплопроводности лучше для мгновенно действующего источника, в этом случае решения (1) и (2) получились бы значительно проще. Это было бы действительно так, если бы имелся всего один цикл нагружения. На практике число циклов достаточно велико и температура

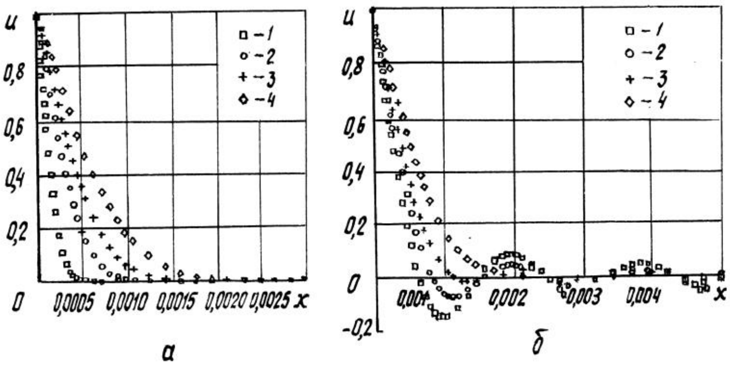

Рис. 1. Распределение температур в стержне для ряда с числом членов n = 10 и различных моментов времени: *1* – 0,001 с; *2* – 0,005; *3* – 0,010; *4* – 0,020; *а* – решение в экспоненциальных рядах; *б* – в тригонометрических рядах

режущей кромки устанавливается около некоторой средней величины, которая в нашем случае соответствует квазистационарной температуре. Таким образом, моделирование реального теплового поля первой краевой задачей предпочтительней, чем исследование распространения мгновенного теплового импульса. Кроме того, решения (1) и (2) могут быть легко модернизированы и для более сложных краевых условий.

Рассмотрим зависимость точности вычислений от числа удерживаемых при расчете членов ряда.

На рис. 1 показан характер изменения температуры *u* во времени *x* или *t* для двух видов решений, представленных в экспоненциальных и тригонометрических рядах. Видно, что для тригонометрических рядов амплитуда колебаний уменьшается с ростом времени, что и следовало ожидать. Практический интерес представляют именно малые промежутки времени.

На рис. 2 показана зависимость температуры стержня от числа удерживаемых членов ряда *n*. Видно, что точность вычисления по решению в экспоненциальных рядах для малых промежутков времени практически не зависит от *n*, поэтому для практических расчетов можно принять $n = 5$. Что касается тригонометрических рядов, то для них отклонения становятся сравнительно малыми только при $n > 50$. Таким образом, непосредственные вычисления подтверждают, что для тригонометрических рядов существует сильная зависимость между точностью вычислений и промежутком времени при постоянном числе удерживаемых членов ряда *n*.

Предлагается следующая методика выбора числа удерживаемых членов ряда при проведении расчетов по решениям, полученным в тригонометрических рядах.

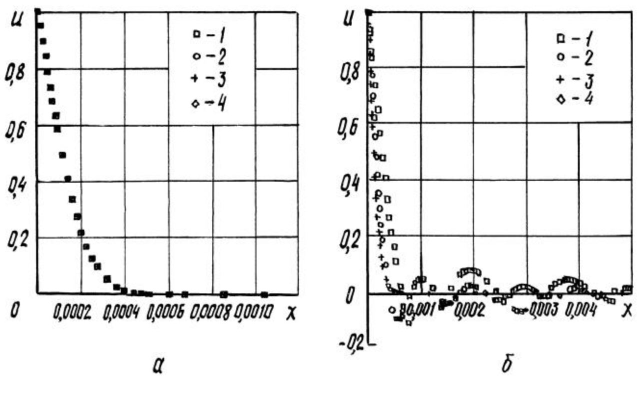

Рис. 2. Распределение температур в стержне в момент времени $t = 0{,}001$ с для различного числа удерживаемых членов ряда: *а* – решение в экспоненциальных рядах (*1* – $n = 5$; *2* – 10; *3* – 25; *4* – 50); *б* – решение в тригонометрических рядах (*1* – $n = 10$; *2* – 20; *3* – 50; *4* –100)

Допустим, что для данной задачи существует и известно решение как в тригонометрических, так и в экспоненциальных рядах. Как показано выше, точность вычислений по решениям в экспоненциальных рядах слабо зависит от числа удерживаемых членов ряда, по крайней мере, для быстротекущих процессов. Зададимся некоторым числом удерживаемых членов экспоненциального ряда n, при котором будем считать найденное решение точным (в нашем примере достаточно было взять $n = 5, \ldots, 10$). Тогда относительную погрешность вычислений по решениям в тригонометрических рядах можно определить по формуле

$$\delta(x,t) = \frac{\left| u_{\exp}(x,t) - u_{\text{trig}}(x,t,m) \right|}{u_{\exp}(x,t)}, \tag{3}$$

где $u_{\exp}(x, t)$ – температура в точке x в момент времени t, определенная по решению в экспоненциальных рядах;

$u_{\text{trig}}(x,t,m)$ – температура в точке x в момент времени t, определенная по решению в тригонометрических рядах для числа удерживаемых членов ряда m.

Отсюда, задаваясь различными значениями m, можно подобрать его таким, чтобы удовлетворить требуемой точности вычислений в соответствии с формулой (3)[*].

Выводы

1. При практических вычислениях для быстротекущих процессов по решениям дифференциального уравнения теплопроводности, представленным в тригонометрическом и экспоненциальном рядах, экспоненциальный ряд сходится к приемлемо точному, в рамках данной задачи, решению существенно быстрее, чем тригонометрический.

2. В случае, когда постановка задачи допускает получение решений в тригонометрических и в экспоненциальных рядах, при существенно более быстрой сходимости экспоненциальных рядов оценка точности вычислений по решению в тригонометрических рядах может быть получена по формуле (3).

3. Оценка точности вычислений, проведенная по изложенной методике, может экстраполирована и на задачи, для которых нет решений в экспоненциальных рядах, однако это предположение остается пока недоказанным. Основанием для подобного утверждения служит то, что для различных краевых условий форма решения в тригонометрических рядах остается практически без изменений.

---

[*] Формула (3) дает несколько завышенные значения (что зачастую идет в запас), поскольку частичная сумма исследуемого экспоненциального ряда меньше, чем полная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков Н.С.* и др. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 115с.
2. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 76с.

Севмашвтуз

Поступила 28.05.01

V.I. Malygin, A.E. Smaglov

Calculation Accuracy Assessment of Thermal Conductivity Equation in Thermophysics Tasks when Designing Woodcutting Tool

The accuracy assessment technique of temperature calculation is suggested for the solution in trigonometric series for which the solution in exponential series is available.