



УДК 531.001

**С.И. Морозов**

Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет более 180 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.



### ВЛИЯНИЕ ТВЕРДОСТИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ НА ИХ УПРУГОПЛАСТИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Приведен анализ математических зависимостей при ударе (и сжатии) упругих и упругопластичных тел. Рассмотрено влияние твердости тел на показатели их пластичности и нелинейности.

*Ключевые слова:* удар, твердость, пластичность, нелинейность, эксперимент.

Контактный удар (или сжатие) двух упругих тел рассмотрен в работах В. Гольдсмита [1], А.Н. Динника [2], Г. Герца [6, 7]. Ими получены следующие выражения.

Для силовой функции имеем

$$F = K\alpha^n, \quad (1)$$

где  $F$  – сила удара (или сжатия тел);

$K$  – показатель упругости тел (коэффициент Герца);

$\alpha$  – деформация тел в точке соударения;

$n$  – показатель нелинейности (значения степени  $\alpha$ ). Для упругих тел по Герцу  $n = 1,5$ .

Для коэффициента Герца

$$K = \frac{4}{3} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (2)$$

где  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона;

$E_1, E_2$  – модули Юнга;

$R_1, R_2$  – радиусы сферических тел.

Обозначим

$$\sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \rho, \quad (3)$$

где величину  $\rho$  назовем приведенным радиусом закругления двух соударяющихся тел.

Для схемы на рис.1:  $R_1 = R$ ;  $R_2 = \infty$ ;  $\rho = \sqrt{R}$ .

При выводе уравнений (1) и (2) Г. Герц и А.Н. Динник предполагали, что поверхности соударяющихся тел выражаются уравнениями второй степени (шар, эллипс, парабола, гипербола).

Аналогичная задача была решена И.Я. Штаерманом [4, 5] для случая более плотного соприкосновения тел, когда поверхности соударяющихся тел выражаются уравнениями более высокой степени (рис. 2).

Коэффициенты плотности соприкосновения тел при ударе обозначим буквой  $m$ . Показатель нелинейности Штаерман предлагает определять по формуле

$$n = \frac{2m+1}{2m}. \quad (4)$$

Если  $m = 1$ , то  $n = 3/2 = 1,5$  (т. е. имеем случай Герца). При более плотном касании по формуле (4) находим: если  $m = 2$ , то  $n = 5/4 = 1,25$ ; если  $m = 3$ , то  $n = 7/6 = 1,167$ , т. е. с возрастанием  $m$  удар становится более плотным. Если  $m \rightarrow \infty$ , то имеем  $n \rightarrow 1$ , т. е. удар становится линейным:

$$F = C\alpha, \quad (5)$$

где величина  $C$  аналогична коэффициенту постели.

В работах Штаермана [4, 5] приведено также выражение для вычисления коэффициента  $K$  в зависимости от  $m$ :

$$K = \frac{4m}{2m+1} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \sqrt[2m]{\frac{2m-1}{2m}} \sqrt[2m]{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (6)$$

Множитель, зависящий от  $m$ ,

$$K = \frac{4m}{2m+1} \sqrt[2m]{\frac{2m-1}{2m}},$$

обозначим буквой  $K_0$  и назовем максимальным коэффициентом пластичности. Тогда выражение (6) примет вид

$$K = K_0 \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \sqrt[2m]{\rho}. \quad (6a)$$

Значения  $m$ ,  $n$  и  $K_0$  (помимо прочих факторов) зависят от твердости тел  $T$ . Это подтверждается данными, приведенными в таблице.

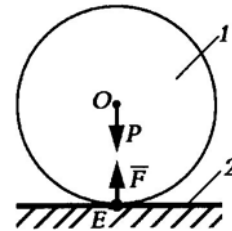


Рис. 1. Расчетная схема соударения тел по Герцу: 1, 2 – соударяющиеся тела; E – точка удара

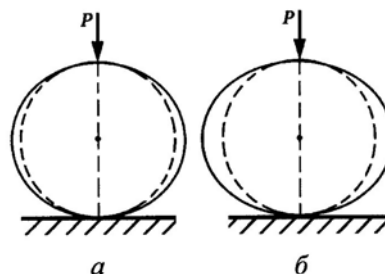


Рис. 2. Случаи взаимодействия тел по Штаерману: а –  $m=2$ ; б –  $m=3$

$T$ , HRC	$n$	$m$	$K_0$	$B_0 \cdot 10^{-9}$	$B_{01} \cdot 10^{-9}$
65	1,50	1,00	0,9428	126	135
60	1,46	1,09	1,0621	38	26
50	1,38	1,32	1,2038	12	13
38	1,29	1,72	1,4022	9	9
28	1,22	2,27	1,5955	3,5	4
≈0	1,06	8,33	1,8800	3	3,5

Здесь  $B_0$ ,  $B_{01}$  – средние значения коэффициента пластичности соответственно на стадии нагрузки и разгрузки.

Значения  $T$ ,  $B_0$ ,  $n$ ,  $B_{01}$  получены экспериментально Д.Н. Шостенко [3], остальные величины определены по приведенным выше зависимостям.

Таким образом, материалы исследований показывают, что формулу Герца для  $T = 65$  HRC можно применять при соударении упругих тел, в остальных случаях ( $T < 65$  HRC) имеем случай упругопластичного удара, что требует при аналитическом решении задач удара (сжатия) двух тел использовать формулу Штаермана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдсмит, В. Удар [Текст] / В. Гольдсмит. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
2. Динник, А.Н. Удар и сжатие упругих тел [Текст]: избр. тр. Т. 1 / А.Н. Динник. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1952. – С. 13–144.
3. Морозов, С.И. Определение параметров силовой функции при сжатии и соударении упругопластичных тел [Текст] / С.И. Морозов, Д.Н. Шостенко // Лесн. журн. – 2004. – № 3. – С. 50–55. – (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Штаерман, И.Я. Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел [Текст] / И.Я. Штаерман // ДАН СССР. – 1940. – Т. 29, № 3.
5. Штаерман, И.Я. К вопросу о местных деформациях при сжатии упругих тел [Текст] / И.Я. Штаерман // ДАН СССР. – 1941. – Т. 31, № 8.
6. Hertz, Y. Über die Berührung fester elastischer Körper [Text] / Y. Hertz // Crell es Journ. – 1881. – Bd. 92.
7. Hertz, Y. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte [Text] / Y. Hertz // Gesam Werke. – Leipzig, 1895. – Bd. 1.

Архангельский государственный  
технический университет

Поступила 21.03.06

*S.I. Morozov*

#### **Impact of Bodies Hardness on their Elasto-plastic Indices**

Analysis of mathematical dependencies under the collision of elastic and elasto-plastic bodies is provided. The impact of bodies' hardness on their plasticity and nonlinearity indices is considered.