УДК 658.581.001.57

В.Н. Шиловский

Шиловский Вениамин Николаевич родился в 1945 г., окончил в 1970 г. Петрозаводский государственный университет, доктор технических наук, профессор кафедры технологии металлов и ремонта ПетрГУ. Имеет более 150 печатных трудов в области надежности и ремонта лесных машин.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЪЕМОВ ПОСТАВОК И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАПАСНЫХ ЧАСТЕЙ МЕЖДУ ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАЗОБЩЕННЫМИ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ

Представлена вероятностная модель обеспеченности и необеспеченности запасными частями лесозаготовительных машин, позволяющая определить оптимальный объем поставки и распределения запасных частей между территориально разобщенными потребителями.

Ключевые слова: лесозаготовительные машины, запасные части, оптимизация поставки, распределение, вероятностная модель.

Парк машин лесозаготовительного предприятия, как правило, состоит всего из нескольких десятков единиц и характеризуется малым числом отказов за период T_n, обычно принимаемый равным одному году. Поэтому задача определения оптимального числа запасных частей (ЗПЧ) носит чисто дискретный характер, что дает возможность решать ее с использованием схемы Бернулли (СБ) [1]. Использование СБ предполагает, что за рассматриваемый промежуток времени с машиной может произойти только одно из двух событий: объект откажет или не откажет.

Если вероятности двух, трех и более отказов одной машины за плановый период таковы, что этими событиями нельзя пренебречь, то необходимо многократное использование СБ, т. е. период разбивается на такие интервалы времени, в пределах которых вероятность более одного отказа достаточно мала для того, чтобы ее можно было не учитывать.

Разбиение будем считать удовлетворительным, если при дальнейшем удвоении числа интервалов новое значение математического ожидания (МО) числа отказов всех машин предприятия отличается от предыдущего не более чем на 1 … 3 %. Это условие предполагает суммирование нескольких независимых простейших потоков отказов с любыми законами распределения [2].

Обозначим через q_i вероятность отказа одной детали в течение i-го интервала времени с учетом возможных замен на предыдущих интервалах.

Вероятность отказа одной детали в течение i-го интервала при отсутствии замен отказавших деталей на предыдущих интервалах

$$f_i = F_i - F_{i-1}, \tag{1}$$

где F_i – интегральная функция распределения вероятности отказа детали в конце i-го интервала.

Для первого интервала $q_1 = f_1$. Число деталей, отказавших в течение второго интервала, с учетом замен на первом, равно:

$$M_2 = (f_1^2 + f_2)M = (q_1 f_1 + f_2)M\,, \qquad (2)$$

где f_1 – вероятность отказа деталей в первом интервале;

f_2 – вероятность отказа во втором интервале при отсутствии замен деталей в первом;

$(q_1 M) f_1$ – число отказавших деталей во втором интервале из $q_1 M$ деталей, установленных взамен отказавших в первом;

$f_2 M$ – число отказавших деталей во втором интервале из M деталей, установленных к началу первого интервала.

Для решения данной задачи примем следующий порядок распределения запчастей:

каждый лесопункт (ЛЗП) при отсутствии ЗПЧ вначале обращается к ближайшему их резерву – центральному складу (ЦС) или другому ЛЗП, затем к следующему по удаленности резерву и т. д.;

к резерву любого ЛЗП и ЦС вначале обращается ближайший ЛЗП, затем следующий по удаленности и т. д.

В формализованном виде эти правила обращения представляют собой множество упорядоченных пар натуральных чисел $W_i(c,t)$, где c – номер ЛЗП или ЦС, к которому обращается ЛЗП с номером t, причем c принимает одно из следующих значений: 1, 2, …, T, S, а t = 1, 2, …, T. Индекс i– номер обращения, который изменяется от единицы до T^2, где T – число ЛЗП. Величина $S = T + 1$ обозначает номер ЦС.

Функционирование рассматриваемой системы парк машин – резерв ЗПЧ – внешний источник ЗПЧ исследуем с помощью следующей вероятностной модели. Для каждого ЛЗП и любого i-го интервала времени вводятся две независимые случайные величины. Первая показывает, что на данном t-м ЛЗП в течение i-го интервала произошло m отказов; вероятности этих событий $P_{i,t}(m)$ задают выражением

$$P_{i,t}(m) = \frac{N_t!}{(N_t - m)!\,m!} q_i^m (1 - q_i)^{N_t - m}\,, \qquad (3)$$

где N_t – число машин на t-м лесопункте.

Вторая случайная величина описывает состояние резерва запасных частей на ЛЗП и показывает, что резерв данного t-го ЛЗП на интервале i содержит K ЗПЧ. Вероятность этих событий будет обозначаться через $Q_{i,t}(K)$, K = 0, 1, …, K_t. Через произведение этих случайных величин задается еще одна группа событий, состоящая в том, что на данном ЛЗП не может быть устранено более n отказов. Вероятности этих событий будут обозначаться через $V_{i,t}(n)$ и называться вероятностями n заявок, n = 0, 1, …, N_t.

Знать вероятности этих трех групп событий достаточно для вычислений МО числа отказов на данном ЛЗП, устраняемых за счет собственного резерва ЗПЧ ЛЗП, резервов других ЛЗП, ЦС и внешнего источника; по этому числу отказов определяют МО суммарных затрат.

Нельзя установить, какой из отказов, происшедших в течение данного интервала времени, произойдет раньше, какой – позже. Считаем, что они происходят одновременно, поэтому резерв данного ЛЗП вначале используется машинами этого ЛЗП, и лишь затем происходит обращение к нему других ЛЗП. Обозначим обращение машин t-го ЛЗП к собственному резерву запчастей K_t через $t \to t$, обращение t-го ЛЗП к k-му ЛЗП через $t \to k$.

Вероятность наличия m ЗПЧ на t-м ЛЗП в интервале времени j (после обращения $t \to t$ на этом интервале к резерву K_t) при предположении о независимости отказов в любых двух различных интервалах времени вычисляется по формуле

$$Q_{j,t}(m) = \sum_{\substack{n=m \\ c=n-m}}^{M} Q_{j-1,t}(n) P_{j,t}(c), \qquad (4)$$

где $m = 1, 2, \ldots, K_t$;

$M = K_t$ при $m + N_t \ge K_t$;

$M = N_t + m$ при $m + N_t < K_t$.

Значит,

$$Q_{j,t}(0) = 1 - \sum_{m=1}^{K_t} Q_{j,t}(m). \qquad (5)$$

Вероятность m заявок от t-го ЛЗП в интервале j после обращения $t \to t$ равна:

$$V_{j,t}(m) = \sum_{\substack{n=m \\ c=n-m}}^{M} P_{j,t}(n) Q_{j-1,t}(c), \qquad (6)$$

где $m = 1, 2, \ldots, N_t$;

$M = N_t$ при $m + K_t \ge N_t$;

$M = K_t + m$ при $m + K_t < N_t$;

$Q_{j-1,t}(c)$ – вероятность наличия c ЗПЧ на t-м ЛЗП по истечении $(i - 1)$-го интервала.

Значит,

$$V_{j,t}(0) = 1 - \sum_{m=1}^{N_t} V_{j,t}(m). \qquad (7)$$

В начальный момент времени $Q_{0,t}(c)$ задают следующим образом:

$$Q_{0,t}(K_t) = 1;\ Q_{0,t}(c) = 0 \text{ для } c < K_t.$$

Математическое ожидание числа отказов, устраненных на t-м ЛЗП в течение j-го интервала за счет резерва K_t, равно:

$$\text{МО1}_{j,t} = \sum_{k=1}^{K_t} Q_{j-1,t}(K) A(K), \qquad (8)$$

где

$$A(K) = \sum_{m=1}^{K} mP_{j,t}(m) + K \sum_{n=K+1}^{N_t} P_{j,t}(n) \text{ при } N_t > K; \tag{9}$$

$$A(K) = \sum_{m=1}^{K} mP_{j,t}(m) \text{ при } K \geq N_t. \tag{10}$$

Вероятность наличия m ЗПЧ на k-м ЛЗП на j-м интервале после обращения $t \to k$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле (4), но вместо $Q_{j\text{-}1,t}(n)$ и $P_{j,t}(c)$ будут соответственно $Q'_{j,k}(n)$ – вероятность наличия на k-м ЛЗП на j-м интервале n ЗПЧ после обращения $k \to k$ или $m \to k$, предшествовавшего обращению $t \to k$, и $V_{j,k}(c)$ – вероятность c заявок обращения $t \to k$:

$$Q_{j,k}(m) = \sum_{\substack{n=m \\ c=n-m}}^{M} Q'_{j,k}(n) V_{j,t}(c), \tag{11}$$

где $m = 1, 2, \ldots, K_k$;

$M = K_k$ при $m + N_t < K_k$;

$M = N_t + m$ при $m + N_t < K_k$.

$$Q_{j,k}(0) = 1 - \sum_{m=1}^{K_k} Q_{j,k}(m). \tag{12}$$

Вероятность m заявок от t-го ЛЗП на j-м интервале после обращения $t \to k$ вычисляют по формуле, аналогичной формуле (6):

$$V_{j,t}(m) = \sum_{\substack{n=m \\ c=n-m}}^{M} V'_{j,t}(n) Q_{j,k}(c), \tag{13}$$

где $m = 1, 2, \ldots, N_t$;

$M = N_t$ при $n + K_k \geq N_t$;

$M = K_k + m$ при $m + K_k \leq N_t$.

Здесь $V'_{j,t}(n)$ – вероятность n заявок от t-го ЛЗП на j-м интервале перед обращением $t \to k$, а $Q_{j,k}(c)$ – вероятность наличия c ЗПЧ на k-м ЛЗП на j-м интервале в момент обращения $t \to k$.

$$V_{j,t}(0) = 1 - \sum_{m=1}^{N_t} V'_{j,t}(m). \tag{14}$$

Математическое ожидание числа отказов, устраняемых на t-м ЛЗП в течение j-го интервала за счет резерва m-го ЛЗП при обращении $t \to m$, равно:

$$\text{MO2}_{j,t}(m) = \sum_{k=1}^{K_m} Q_{j,m}(K) A(K), \tag{15}$$

где

$$A(K) = \sum_{m=1}^{K} cV_{j,t}(c) + K \sum_{n=k+1}^{N_t} V_{j,t}(n) \text{ при } N_t > K; \tag{16}$$

$$A(K) = \sum_{c=1}^{N_t} cV_{j,t}(c) \text{ при } K \geq N_t. \qquad (17)$$

Здесь $Q_{j,m}(K)$ и $V_{j,t}(c)$ – соответственно вероятность наличия k ЗПЧ на m-м ЛЗП и вероятность c заявок от t-го ЛЗП на j-м интервале при обращении $t \to m$.

Вычисления по формулам (11), (13), (15) для обращений $t \to k$ производятся в последовательности, задаваемой стратегией обращений $S_i(k, t)$. Центральный склад формально рассматривается как ЛЗП с резервом в $K_{(T+1)}$ ЗПЧ, на котором отсутствуют машины, и вероятность c заявок от ЦС ($c > 0$) равна нулю, а вероятность «нулевой» заявки – единице.

Математическое ожидание числа отказов, устраняемых на t-м ЛЗП в течение j-го интервала за счет резерва других ЛЗП и ЦС, равна сумме:

$$T2_{j,t} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^{T+1} \text{MÎ } 2_{j,t}(m). \qquad (18)$$

Математическое ожидание числа отказов, устраняемых на t-м ЛЗП в течение j-го интервала за счет ЗПЧ из внешнего источника, равно разности:

$$\text{МО3}_{j,t} = \text{МО}_{j,t} - \text{МО1}_{j,t} - \text{Т2}_{j,t}, \qquad (19)$$

где МО $_{j,t}$ – МО числа отказов на всех машинах t-го ЛЗП в течение j-го интервала.

$$\text{МО}_{j,t} = \sum_{c=1}^{N_t} cP_{j,t}(c). \qquad (20)$$

Частная задача, в которой каждый ЛЗП имеет доступ лишь к части общего резерва ЗПЧ предприятия (собственному резерву ЦС), решается аналогично, но для другой стратегии обращения. Для этого случая стратегия формулируется в виде следующих правил:

а) каждый ЛЗП вначале обращается к собственному резерву, а затем к резерву ЦС;

б) к резерву ЦС вначале обращается ближайший ЛЗП, затем следующий по удаленности и т. д.

Математическое ожидание общих затрат по всему предприятию при всех вариантах поставки и распределения запчастей за весь расчетный период равно:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 + Z4 + Z5, \qquad (21)$$

где $Z1$, $Z2$, $Z3$, $Z4$, $Z5$ – МО затрат, соответственно связанных с устранением отказов за счет собственных резервов ЛЗП; других ЛЗП или ЦС; ЗПЧ из внешнего источника; на создание резерва ЗПЧ; из-за недоиспользования ЗПЧ.

Минимум МО общих затрат (Z) является условием оптимального объема поставки и распределения запасных частей между территориально распределенными потребителями лесозаготовительных машин.

Выводы

1. При определении потребности в ЗПЧ за критерий оптимальности необходимо принять минимум суммарных затрат, основными составляющими которых являются потери, связанные с простоями техники как из-за недостатка, так и переизбытка ЗПЧ.

2. Выбор оптимального резерва ЗПЧ невозможен без учета его распределения между отдельными группами машин.

3. Стратегия распределения запчастей между территориально разобщенными потребителями с учетом их оперативного взаимного обращения позволяет на порядок снизить простои ЛЗМ и одновременно общий потребный запас ЗПЧ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Ф.П.* Обеспечение лесозаготовительной техники запасными частями. – М.: Экология, 1991. – 144 с.

2. *Шиловский В.Н.* Теоретические основы и стратегии организации маркетинга и менеджмента технического сервиса территориально распределенных машин и оборудования. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2001. – 324 с.

Петрозаводский государственный университет

Поступила 10.02.02

V.N. Shilovsky

Mathematical Model of Supplies Volume Optimization and Spare Parts Distribution among Territorially Scattered Customers

The probability model of provision and non-provision of spare parts for forest-harvesting machines is provided allowing to set the optimal volume of spare parts supply and distribution among territorially scattered customers.