

## ЛЕСОЭКСПЛУАТАЦИЯ

УДК 625.731.001.2

ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ДОРОЖНУЮ ОДЕЖДУ НАГРУЗКИ,  
ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СО ВРЕМЕНЕМ

Е. С. БУРЯК, Б. В. УВАРОВ, В. В. ЩЕЛКУНОВ

Архангельский лесотехнический институт

При движении автомобилей и автомобильных поездов возникают вертикальные колебания и ускорения частей машин и прицепов. Появляющиеся при этом динамические силы передаются на дорожную одежду. Влияние их на напряженно-деформированное состояние слоев дорожной одежды отличается от действия статических нагрузок.

В данной статье предлагается метод расчета слоистых дорожных одежд с учетом действия динамических сил. Рассматривается осесимметричная задача, т. е. воздействие давления, распределенного по круговой площади абсолютно гибкого или абсолютно жесткого штампов.

Рассматриваем задачу в цилиндрических координатах: координата  $z$  соответствует оси симметрии, координата, перпендикулярная первой, обозначена  $r$ .

Осесимметричная задача (задача Лэмба) сводится к решению системы двух волновых уравнений [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_1^2} \ddot{\varphi}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_2^2} \ddot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — волновые функции;

$c_1$  — скорость распространения продольных волн,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}};$$

$c_2$  — скорость распространения поперечных волн,

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}};$$

$\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе, зависящие от модуля упругости и коэффициента Пуассона слоев дорожной одежды;

$\rho$  — плотность материала дорожной одежды.

Применим интегральные преобразования к первому уравнению системы (1). Преобразование Лапласа по времени  $t$  при нулевых начальных условиях дает

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \frac{s^2}{c_1^2} \bar{\varphi},$$

где  $s$  — комплексная переменная, соответствующая времени в пространстве Лапласа.

Преобразование Лапласа по координате  $z$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \left( p^2 - \frac{s^2}{c_1^2} \right) \bar{\varphi} = p \bar{\varphi}(r, 0, s) + \frac{\partial \bar{\varphi}(r, 0, s)}{\partial z}.$$

Здесь  $p$  — комплексная переменная, соответствующая координате  $z$ ;

$\bar{\varphi}(r, 0, s)$  и  $\frac{\partial \bar{\varphi}(r, 0, s)}{\partial z}$  — постоянные интегрирования при  $z = 0$ .

Преобразование Ханкеля по координате  $r$

$$-\alpha^2 \bar{\varphi}^x + \left( p^2 - \frac{s^2}{c_1^2} \right) \bar{\varphi}^x = p \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s) + \frac{\partial \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z},$$

где  $\alpha$  — переменная, соответствующая координате  $r$  в пространстве Ханкеля.

Из последнего уравнения находим

$$\bar{\varphi}^x(\alpha, p, s) = \frac{p \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s) + \frac{\partial \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z}}{p^2 - \frac{s^2}{c_1^2} - \alpha^2}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа по  $p$ , используя таблицы [1], получим:

$$\bar{\varphi}_x(\alpha, z, s) = \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + \alpha^2} z + \frac{\frac{\partial \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z}}{\sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + \alpha^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + \alpha^2} z.$$

Аналогичным образом вычисляем изображение функции  $\psi$  второго уравнения системы (1)

$$\bar{\psi}_1^x(\alpha, z, s) = \bar{\psi}^x(\alpha, 0, s) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + \alpha^2} z + \frac{\frac{\partial \bar{\psi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z}}{\sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + \alpha^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + \alpha^2} z.$$

Из теории упругости известны зависимости напряжений и перемещений от волновых функций [2]. Преобразуя эти зависимости по Ханкелю (координата  $r$ ) и Лапласу (координата  $t$ ) и подставив в них полученные изображения  $\bar{\varphi}^x$  и  $\bar{\psi}^x$ , найдем:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z^x = & A_1 \left[ a_1^2 (2\mu + \lambda) - \lambda a^2 \right] \operatorname{ch} a_1 z + B_1 \left[ a_1 (2\mu + \lambda) - \frac{\lambda a^2}{a_1} \right] \operatorname{sh} a_1 z + \\ & + 2A_2 \mu a_2 \left( a_2^2 - \frac{s^2}{c_2^2} \right) \operatorname{sh} a_2 z + 2\mu B_2 \left( a_2^2 - \frac{s^2}{c_2^2} \right) \operatorname{ch} a_2 z; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_r = & -\mu \int_0^\infty \alpha^2 \left[ 2A_1 a_1 \operatorname{sh} a_1 z + 2B_1 \operatorname{ch} a_1 z + A_2 \left( 2a_2^2 - \frac{s^2}{c_2^2} \right) \operatorname{ch} a_2 z + \right. \\ & \left. + B_2 \left( 2a_2 - \frac{s^2}{a_2 c_2^2} \right) \operatorname{sh} a_2 z \right] I_1(\alpha r) d\alpha; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}^x = & A_1 a_1 \operatorname{sh} a_1 z + B_1 \operatorname{ch} a_1 z + A_2 \left( a_2^2 - \frac{s^2}{c_2^2} \right) \operatorname{ch} a_2 z + \\ & + B_2 \left( a_2 - \frac{s^2}{a_2 c_2^2} \right) \operatorname{sh} a_2 z. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах обозначено:

$$a_1 = \sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + \alpha^2}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + \alpha^2};$$

$$A_1 = \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s); \quad B_1 = \frac{\partial \bar{\varphi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z}; \quad A_2 = \bar{\psi}^x(\alpha, 0, s); \quad B_2 = \frac{\partial \bar{\psi}^x(\alpha, 0, s)}{\partial z};$$

$I_1(\alpha r)$  — функция Бесселя первого рода.

Для вычисления напряжений и перемещений следует найти  $A_1, B_1, A_2, B_2$  по известным граничным условиям на поверхности основания:  $\bar{\sigma}_z^x = -\bar{p}^x(\alpha, s)$  и  $\bar{\tau}_r = 0$ .

Величина  $\bar{p}^x(\alpha, s)$  представляет собой изображение внешней нагрузки в пространствах Ханкеля и Лапласа. Изображение осесимметричных нагрузок в пространстве Ханкеля приведено в работе [4].

Зависимость внешней силы от времени может быть практически любой: синусоидальной, вида  $PU(t)$  (где  $U(t)$  — единичная функция), прямоугольной, треугольной, трапецидальной и др. Изображение в пространстве Лапласа берется по таблицам [1].

Дополнительными условиями являются равенство  $\bar{\sigma}^x, \bar{\tau}, \bar{W}^x$  и  $\bar{U}^x$  на границах слоев дорожной одежды и нулю на бесконечности. Для двухслойного основания постоянные интегрирования находят из решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1' [a_{11}^2 (2\mu_1 + \lambda_1) - \alpha^2 \lambda_1] + B_2' 2\mu_1 \left( a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) &= -\bar{p}^x(\alpha, s); \\ 2B_1' + A_2' \left( 2a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) &= 0; \\ A_1' [a_{11}^2 (2\mu_1 + \lambda_1) - \alpha^2 \lambda_1] \operatorname{ch} a_{11} h + B_1' [a_{11} (2\mu_1 + \lambda_1) - \\ - \frac{\lambda_1 \alpha^2}{a_{11}}] \operatorname{sh} a_{11} h + 2A_2' \mu_1 a_{21} \left( a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) \operatorname{sh} a_{21} h + 2B_2' \mu_1 \left( a_{21}^2 - \right. \\ \left. - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) \operatorname{ch} a_{21} h - A_1'' [a_{12}^2 (2\mu_2 + \lambda_2) - \lambda_2 \alpha^2] - 2B_2'' \mu_2 \left( a_{22}^2 - \frac{s^2}{c_{22}^2} \right) &= 0; \\ 2A_1' \mu_1 a_{11} \operatorname{sh} a_{11} h + 2B_1' \mu_1 \operatorname{ch} a_{11} h + A_2' \mu_1 \left( 2a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) \operatorname{ch} a_{21} h + \\ + B_2' \left( 2a_{21} - \frac{s^2}{a_{21} c_{21}^2} \right) \mu_1 \operatorname{sh} a_{21} h - 2\mu_2 B_1'' - A_2'' \mu_2 \left( 2a_{22}^2 - \frac{s^2}{c_{22}^2} \right) &= 0; \\ A_1' a_{11} \operatorname{sh} a_{11} h + B_1' \operatorname{ch} a_{11} h + A_2' \left( a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) \operatorname{ch} a_{21} h + \\ + B_2' \left( a_{21} - \frac{s^2}{a_{21} c_{21}^2} \right) \operatorname{sh} a_{21} h - B_1'' - A_2'' \left( a_{22}^2 - \frac{s^2}{c_{22}^2} \right) &= 0; \\ A_1' \operatorname{ch} a_{11} h + B_1' \frac{\operatorname{sh} a_{11} h}{a_{11}} + A_2' a_{21} \operatorname{sh} a_{21} h + B_2' \operatorname{ch} a_{21} h - A_1'' - B_2'' &= 0; \\ A_1'' a_{12} + B_1'' + A_2'' \left( a_{22}^2 - \frac{s^2}{c_{22}^2} \right) + B_2'' \left( a_{22} - \frac{s^2}{a_{22} c_{22}^2} \right) &= 0; \\ A_1'' + B_1'' \frac{1}{a_{12}} + A_2'' a_{22} + B_2'' &= 0. \end{aligned} \right\} (5)$$

В системе (5) постоянные с одним штрихом относятся к верхнему слою, с двумя штрихами — к нижнему; у переменных с двумя индексами

первый индекс соответствует номеру слоя;  $h$  — толщина верхнего слоя.

Выполняя обратное преобразование Ханкеля в (4) для верхнего слоя при  $z = 0$ , получим:

$$\bar{W} = \int_0^{\infty} \alpha I_0(\alpha r) \left[ B'_1 + A'_2 \left( a_{21}^2 - \frac{s^2}{c_{21}^2} \right) \right] d\alpha. \quad (6)$$

Значение этого несобственного интеграла можно найти только численным методом, так как  $B'_1$  и  $A'_2$  определяются системой (5) и зависят от  $\alpha$ . Обращение Лапласа в (6) требуется выполнить также численным методом, например описанным в [1].

Для расчета осадки поверхности двухслойного основания в центре штампа (при  $z = 0$ ,  $I_0(\alpha r) = 1$ ) по предложенной методике составлена ФОРТРАН-программа для ЭВМ. Интегрирование в (6) выполним методом прямоугольников при шаге интегрирования  $\Delta\alpha = 0,0175$ . Бесконечный верхний предел заменяем конечной величиной, равной 0,5, найденной в результате анализа графика подынтегральной функции. Для численного обращения Лапласа по [1] требуется вычислять изображения при действительных  $s = (2n + 1)\sigma$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  Пробными расчетами найдено оптимальное (для рассматриваемого диапазона времени  $t$ ) значение  $\sigma = 100$ . Для уменьшения погрешности, связанной с некорректностью численных методов обращения Лапласа, программа составлена в режиме удвоенной точности.

Расчет выполнен на ЭВМ «Наири-4». На одно решение затрачивается около 20 мин машинного времени.

Аналогичным способом можно рассчитать все компоненты напряжений и перемещений при любых  $z$  и  $r$ .

Используем приведенный метод для оценки так называемой присоединенной массы дороги ( $m_n$ ). При изучении вертикальных колебаний автомобиля обычно учитывают упругие и диссипативные реакции дорожной одежды. Вопрос же о колеблющейся при этом ограниченной массе дорожной одежды выяснен недостаточно, хотя имеющиеся опытные данные [3] свидетельствуют о ее наличии.

Рассматриваем две расчетные модели: 1) абсолютно гибкий штамп, равновеликий по площади отпечатка колеса автомобиля МАЗ-509 с нагрузкой, изменяющейся во времени, действует на слоистое основание; 2) некоторая масса с упругим и вязким сопротивлением при приложенной к ней той же нагрузке. Поскольку рассмотренная задача может быть решена численно, сравнение моделей делаем для двухслойного основания: гравий толщиной  $h = 0,4$  м с модулем упругости  $E_1 = 250$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu_1 = 0,27$  и суглинок с  $E_2 = 24$  МПа,  $\nu_2 = 0,35$ . Максимальная динамическая нагрузка равна 20 кН. Упругое сопротивление массы вычисляем по эквивалентному модулю упругости  $E_{э\text{кв}} = 110$  МПа, а коэффициент вязкости принимаем равным  $1,2 \cdot 10^5$  Н · с/м.

Модели сопоставляем по осадке штампа  $S$ . Массу второй модели варьировали.

Наиболее рельефно влияние присоединенной массы выявляется при нагрузке  $PU(t)$ , где  $P$  — наибольшее давление, равномерно распределенное по площади штампа;  $U(t)$  — единичная функция. Результаты расчета представлены на рис. 1, где цифрой 1 обозначены данные, полученные при использовании первой модели, 2 — второй модели при присоединенной массе, равной нулю, 3 — второй модели при массе, наиболее соответствующей первой модели.

Как следует из рисунка, нагрузка на двухслойное основание вызывает появление переходного процесса, соответствующего колебанию покрытия. Если присоединенная масса равна нулю, то переходный процесс

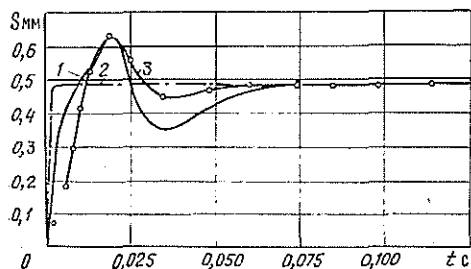


Рис. 1.

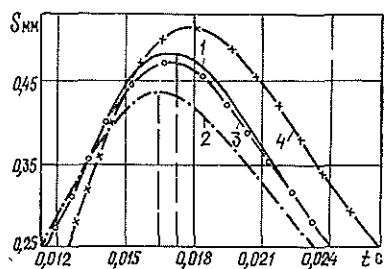


Рис. 2.

почти отсутствует и практически мгновенно осадка становится статической. Введение присоединенной массы обуславливает появление переходного процесса и при  $m_n = 1260$  кг имеется почти полное совпадение с исходной моделью. Рис. 1 позволяет также оценить точность расчета. После достаточно продолжительного времени имеет место статическое решение, и различие в расчетах с использованием разных моделей не превышает 1 %.

Приведенный пример идеализирован. В действительности присоединенная масса зависит от характера нагрузки, времени ее действия и типа дорожной одежды.

Изучение перемещений и ускорений колес автомобилей показывает, что сила, действующая на каждую точку покрытия, обычно изменяется по треугольнику. Время нарастания силы зависит от скорости прохода по данному месту половины диаметра штампа. Поэтому было рассчитано несколько вариантов воздействия треугольной нагрузки с разным временем нарастания силы. На рис. 2 приводятся результаты одного из расчетов (показана только верхняя часть осадки), обозначения те же, что и на рис. 1. В данном случае наилучшее совпадение имеет место при присоединенной массе 250 кг (кривая 3). Массе 600 кг соответствует кривая 4. Динамическая нагрузка принята 20 кН, время ее нарастания 0,015 с.

По расчету для этой же динамической силы с временем нагружения 0,02 и 0,01 с присоединенная масса составила соответственно 210 и 300 кг.

### Выводы

1. Предложен метод расчета двухслойного основания при действии на него внешней нагрузки, изменяющейся со временем.

2. Для принятого типа дорожной одежды присоединенная масса колеблется от 210 до 300 кг, достигая в предельном случае 1260 кг.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования.— М.: Наука, 1971.— 288 с. [2]. Новацкий В. Динамика сооружений.— М.: Госстройиздат, 1963.— 376 с. [3]. Смирнов А. В., Малофеев А. Г. Экспериментальное исследование волн колебаний дорожных покрытий при движении автомобиля.— Прикладная механика, 1973, т. 9, вып. 1, с. 129—134. [4]. Уваров Б. В., Щелкунов В. В., Лукин Ю. Л. Воздействие статической нагрузки на упругое основание.— Изв. высш. учеб. заведений. Лесн. журн., 1976, № 5, с. 43—48.