

Значения коэффициентов жесткости пакета в местах приведения сосредоточенных масс могут быть определены из следующих соображений [1]. Для удержания системы в равновесном положении, определяемом значениями обобщенных координат  $z_{xj} \neq 0$ , к системе необходимо приложить обобщенные силы  $P_j = \sum c_{vj} z_{xv}$ . Поскольку определитель этого уравнения не равен нулю, то их можно решить относительно координат  $z_{xj} = \sum \alpha_{vj} P_j$ . Если принять  $z_{xj} = 0$ , за исключением координаты  $z_{xv}$ , значение которой равно единице, и подставить выражение для  $P_j$  в выражение для  $z_{xj}$ , то получим  $N$  систем из  $N$  уравнений, решение которых дает значения коэффициентов жесткости  $c_{vj} (c'_{vj})$ . Входящие в эти уравнения коэффициенты влияния  $\alpha_{vj}$  определяют изменение координат  $z_{xj}$  от единичной обобщенной силы  $P_j = 1$ , соответствующей координате  $z_{xv}$ . Они вычисляются с использованием методов строительной механики по известным значениям  $EI_\psi (EI'_\psi)$ .

При использовании реальных характеристик пакета хлыстов и выборе числа дискретных масс в соответствии с методикой [1] первые три собственные частоты и формы пакета, лежащие в диапазоне колебаний транспортных звеньев, воспроизводятся с относительной погрешностью соответственно 3...7 и 5...14 %.

Разработанная математическая модель отражает переменные по длине характеристики реального пакета длинномерных лесоматериалов и основные виды движения лесотранспортной системы. Она достаточно универсальна и предназначена для использования в расчетных моделях, описывающих колебания в трансмиссии совместно с вертикальными колебаниями, переходные режимы поступательного движения с учетом продольных кренов, криволинейное движение с учетом вертикальных колебаний (кренов) в продольной и поперечной плоскостях и, наконец, вертикальные и поперечные колебания независимо от остальных видов движения для лесотранспортных средств различной структуры, комплектации и назначения [6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Бабаков И. М. Теория колебаний.— М.: Наука, 1968.— 559 с. [2]. Библиок Н. И. Применение матричного метода начальных параметров для расчета колебаний лесовозного автопоезда // Лесн. журн.— 1977.— № 3.— С. 42—47.— (Изв. высш. учеб. заведений). [3]. Библиок Н. И. Метод расчета величины и размещения дискретных масс пакета хлыстов // Лесн. журн.— 1984.— № 3.— С. 35—39.— (Изв. высш. учеб. заведений). [4]. Библиок Н. И. Основы динамики колесных лесотранспортных машин.— Львов, 1989.— 208 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 15.01.91, № 126-Ук91. [5]. Гастев Б. Г., Мельников В. Н. Основы динамики лесовозного подвижного состава.— М.: Лесн. пром-сть, 1967.— 220 с. [6]. Перетятко Б. Т., Билык Б. В. Выбор параметров дискретных моделей механических систем // Лесн. журн.— 1976.— № 5.— С. 39—43.— (Изв. высш. учеб. заведений).

Поступила 6 мая 1991 г.

УДК 630\*377.1<sub>2</sub>

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ СЖАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ И ВЕРОЯТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Д. Г. ШИМКОВИЧ

Московский лесотехнический институт

При взаимодействии рабочих органов различных лесных машин (грейферы, сплотовые механизмы и др.) могут образовываться весьма

устойчивые системы контактирующих тел — «балки» [3], для разрушения которых требуются значительные усилия.

В ряде работ ([1, 4, 6] и др.) определены значения нагрузок, соответствующие предельным состояниям различных систем сжатых цилиндрических тел (лесоматериалов), однако не исследован характер потери устойчивости таких систем, их докритическое и закритическое поведение.

Рассмотрим случай сжатия идеально гладких цилиндрических тел, который позволяет выявить свойства этого явления, не зависящие от трения. Пусть имеется система цилиндрических тел одинакового диаметра  $d$ , сжатых силой  $N$ ; центры тел расположены на одной прямой, опорная поверхность также идеально гладкая (рис. 1, а). Вертикальную нагрузку на каждое тело, включающую собственную силу тяжести, обозначим  $Q$ . Наряду с прямолинейной формой равновесия при данной силе  $N$ , очевидно, существует множество других смежных форм. В частности, для конфигурации, изображенной на рис. 1, б, из уравнений равновесия

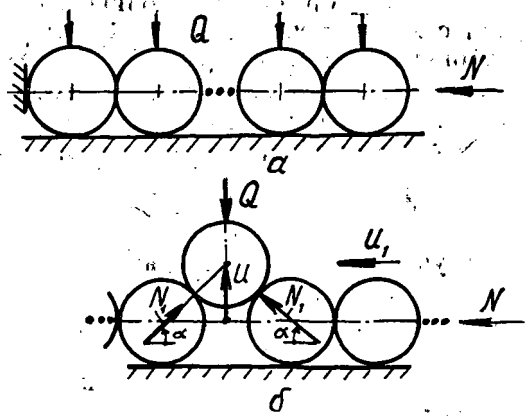
$$N - N_1 \cos \alpha = 0; \quad Q - 2N_1 \sin \alpha = 0,$$

где  $u$  — смещение тела по вертикали, получаем связь между относительной силой  $\bar{N} = N/Q$  и относительным смещением  $\bar{u} = u/d = \sin \alpha$ :

$$\bar{N} = (\text{ctg } \alpha)/2 = \sqrt{1 - \bar{u}^2} / (2\bar{u}). \quad (1)$$

Рис. 1.

Она представлена на рис. 2. Как видно, кривая  $\bar{N}(\bar{u})$  не имеет точек бифуркации (разветвления) или конечных предельных точек. Это свидетельствует об отсутствии характерных значений силы  $\bar{N}$ , при которых малые возмущения тел приводят к потере устойчивости прямолинейной формы равновесия, как, например, в задаче Эйлера для сжатого упругого стержня.



Исследуем движение одного из тел массой  $m$  вблизи прямолинейной формы равновесия. Для схемы, приведенной на рис. 1, б, имеем два дифференциальных уравнения движения системы:

$$m\ddot{u} = 2N_1 u/d - Q; \quad km\ddot{u}_1 = N - N_1 \sqrt{1 - (u/d)^2},$$

где  $u_1$  — горизонтальное смещение тел по опорной поверхности,  $u_1 = d - \sqrt{d^2 - u^2}$ .

Исключая  $N_1$  и  $u_1$ , получаем

$$m\ddot{u} \left( 1 + \frac{2ku^2}{d^2 - u^2} \right) = \frac{2Nu}{\sqrt{d^2 - u^2}} - Q - \frac{2mkd^2 u \ddot{u}^2}{(d^2 - u^2)^2}, \quad (2)$$

где  $k$  — число тел справа (слева) от вытесняемого.

Для исследования устойчивости возмущенного движения линеаризуем уравнение (2), тогда получим уравнение  $m\ddot{u} = 2Nu/d - Q$ . Решение его при начальных условиях  $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0$  имеет вид

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2\bar{N}} + \frac{1}{2} \left( \bar{u}_0 + \frac{v_0}{ad} - \frac{1}{2\bar{N}} \right) e^{at} + \frac{1}{2} \left( \bar{u}_0 - \frac{v_0}{ad} - \frac{1}{2\bar{N}} \right) e^{-at}, \quad (3)$$

где  $\bar{u}_0 = u_0/d$ ;  $a = \sqrt{2\bar{N}Q/(md)}$ .

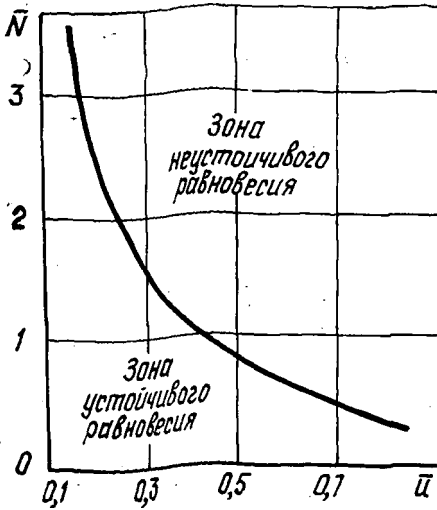


Рис. 2

Из выражения (3) видно, что при  $\bar{u}_0 + v_0/(ad) - 1/(2\bar{N}) > 0$  система неустойчива, так как для  $t \rightarrow \infty$  значение  $\bar{u}$  возрастает, причем смещение и скорость в закритическом состоянии (после потери устойчивости) увеличиваются экспоненциально и тем сильнее, чем больше  $\bar{N}$ . При  $\bar{u}_0 + v_0/(ad) - 1/(2\bar{N}) < 0$  прямолинейная форма равновесия асимптотически устойчива, так как смещение  $u(t)$  с течением времени уменьшается.

Таким образом, прямолинейная система сжатых цилиндрических тел сохраняет устойчивость к бесконечно малым возмущениям (т. е. устойчива в «малом» [5]) и теряет ее лишь при конечных возмущениях  $u_0, v_0$ , удовлетворяющих неравенству  $\bar{u}_0 + v_0/(ad) - 1/(2\bar{N}) > 0$  (неустойчива в «большом»).

Критические значения параметров  $\bar{u}_0, v_0, \bar{N}$  определяем из равенства  $\bar{u}_0 + v_0/(ad) - 1/(2\bar{N}) = 0$ . Подставляя в него  $a = \sqrt{2\bar{N}Q/(md)}$  и обозначая  $\bar{v}_0 = v_0 \sqrt{m/(Qd)}$ , получаем уравнение границы области возмущений  $\bar{u}_0$  и  $\bar{v}_0$ , не приводящих к потере устойчивости прямолинейной формы равновесия:

$$\bar{u}_0 + \bar{v}_0 \sqrt{2\bar{N}} = 1/(2\bar{N}). \quad (4)$$

Полагая  $\bar{v}_0 = 0$ , из уравнения (4) находим границу области устойчивости при статических возмущениях (смещениях):  $\bar{N} = 1/(2\bar{u}_0)$ . С точностью до величин второго порядка малости эта граница совпадает с полученной по формуле (1) без линеаризации. Следовательно, стационарное решение (1) динамического уравнения (2) дает границу области устойчивых статических возмущений прямоугольной системы сжатых тел (см. рис. 1, б). Равновесие может быть также нарушено, если какому-либо телу сообщается скорость  $\bar{v}_0 > 1/\sqrt{2\bar{N}}$  при  $\bar{u} = 0$ . В этом случае движение неустойчиво при любых значениях силы  $\bar{N}$ .

Рассмотрим теперь случай вытеснения нескольких тел. Пусть на  $i$ -е тело массой  $m_i$  и радиусом  $r_i$  действует вертикальная нагрузка  $Q_i$ , включающая силу тяжести  $i$ -го тела (рис. 3). Как и в предыдущем случае, горизонтальные смещения тел являются величинами второго порядка малости. С учетом этого получаем уравнения движения  $i$ -го тела массой  $m_i$  (рис. 3):

$$\begin{cases} m_i \ddot{u}_i = -Q_i + T \sin \alpha - (T + \Delta T) \sin(\alpha + \Delta \alpha); \\ 0 = T \cos \alpha - (T + \Delta T) \cos(\alpha + \Delta \alpha), \end{cases}$$

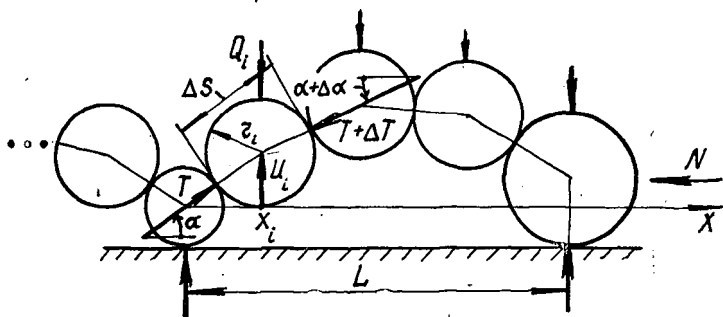


Рис. 3.

где  $T$  — сжимающая сила;  
 $\Delta T, \Delta \alpha$  — приращение силы  $T$  и угла  $\alpha$  соответственно.

Считая  $\Delta T$  и  $\Delta \alpha$  малыми величинами и полагая, что  $m_i = \mu(x_i)\Delta s$ , а  $Q_i = q(x_i)\Delta s$ , где  $\Delta s = d$ ;  $\mu(x_i), q(x_i)$  — удельные масса  $i$ -го тела и нагрузка, отнесенные к среднему диаметру тела  $d$ , находим

$$\begin{cases} \mu(x_i)\ddot{u}_i = -q(x_i) - \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} T \cos \alpha - \frac{\Delta T}{\Delta s} \sin \alpha; \\ 0 = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} T \sin \alpha - \frac{\Delta T}{\Delta s} \cos \alpha. \end{cases}$$

Рассматривая  $u_i(t)$  как некоторую непрерывную функцию  $u(x, t)$  в точке с координатой  $x_i$ , т. е.  $u_i(t) = u(x_i, t)$ , и переходя к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ , получаем систему уравнений в частных производных:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s} (T \sin \alpha) = -q; \quad \frac{\partial}{\partial s} (T \cos \alpha) = 0. \quad (5)$$

Эти уравнения идентичны уравнениям колебаний сжатой нити (безмоментного стержня), т. е. сжатая нить является аналогом цепочки дискретных тел. Если  $\mu$  и  $q$  рассматривать как обобщенные функции ( $\mu(x) = \Sigma m_i \delta(x-x_i)/d$ ;  $q(x) = \Sigma Q_i \delta(x-x_i)/d$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака) и решение системы (5) отыскивать в классе этих функций, то уравнения (5) будут полностью эквивалентны системе дискретных уравнений движения тел.

Ограничимся ниже рассмотрением малых колебаний (т. е.  $\cos \alpha \sim 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} \approx \frac{\partial}{\partial x}$ ) и решением уравнений (5) в классе дважды дифференцируемых функций  $u$ . Считая  $\mu$  и  $q$  постоянными ( $\mu = m_0/d$ ,  $q = Q/d$ , где  $m_0, d, Q$  — средняя масса, диаметр и вертикальная нагрузка), получаем:

$$T = \text{const} = N; \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q. \quad (6)$$

В качестве граничных условий принимаем

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (7)$$

где  $L$  — расстояние между ближайшими телами, взаимодействующими с опорной поверхностью (рис. 3).

Стационарное решение  $\tilde{u}$  задачи (6) — (7) удовлетворяет уравнению  $N \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = -q$ , получающемуся при  $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$ , откуда  $\tilde{u}(x) = qx(L-x)/(2N)$ . Общее решение имеет вид

$$u(x, t) = qx(L-x)/(2N) + Z(t)U(x).$$

Применяя метод разделения переменных, получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{qx(L-x)}{2N} + \sum_{j=1}^{\infty} (c_j e^{\lambda_j t} + d_j e^{-\lambda_j t}) \sin \frac{\pi j x}{L} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + c_j e^{\lambda_j t} + d_j e^{-\lambda_j t}) \sin \frac{\pi j x}{L}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\lambda_j, a_j$  — коэффициенты разложения функции  $\tilde{u}(x) = qx(L-x)/(2N)$  в ряд Фурье по  $\sin(\pi j x/L)$ ,  $\lambda_j = \pi j \sqrt{N^2/L^2}$ ;  $a_j = 4qL^2 \sin^2(\pi j/2)/[N(\pi j)^3]$ ;  $c_j, d_j$  — некоторые константы.

Задавая начальные (при  $t=0$ ) смещения  $u_0(x)$  и скорость  $v_0(x)$  в виде ряда Фурье  $u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \sin \frac{\pi j x}{L}$ ,  $v_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \sin \frac{\pi j x}{L}$  и подставляя (8) в начальные условия  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ , получаем систему уравнений для определения  $c_j, d_j$ :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + c_j + d_j - u_j) \sin(\pi j x/L) = 0; \\ \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j (c_j - d_j) - v_j] \sin(\pi j x/L) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$c_j = (u_j + v_j/\lambda_j - a_j)/2; \quad d_j = (u_j - v_j/\lambda_j - a_j)/2.$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_j + \frac{e^{\lambda_j t}}{2} \left( u_j + \frac{v_j}{\lambda_j} - a_j \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\lambda_j t}}{2} \left( u_j - \frac{v_j}{\lambda_j} - a_j \right) \right] \sin \frac{\pi j x}{L}. \end{aligned}$$

Как видно, структура решения совершенно аналогична уравнению (3) для случая одного тела. Решение устойчиво при  $u_j + v_j/(\lambda_j - a_j) < 0$  и неустойчиво в противном случае. Критические значения параметров  $u_j, v_j$  определяются из равенства

$$u_j + v_j/(\lambda_j - a_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Аналогично (4), соотношение (9) определяет границу области устойчивых начальных форм возмущений  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$ . В частности, при статических ( $v_0 = 0$ ) возмущениях прямолинейной формы устойчивы начальные смещения  $u_0(x)$ , коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям  $u_j \leq a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . В этом случае граничная кривая области устойчивых возмущений ( $u_j = a_j$ ) имеет вид

$$\tilde{u}_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \sin \frac{\pi j x}{L} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin \frac{\pi j x}{L} = \frac{qx(L-x)}{2N}, \quad (10)$$

что соответствует статическому решению задачи (6) — (7).

Максимальный прогиб предельной кривой

$$u_{0 \max} = u_0(L/2) = qL^2/(8N) = Qd(L/d)^2/(8N),$$

откуда критическая нагрузка

$$\bar{N} = \frac{1}{8u_{0 \max}} \left( \frac{L}{d} \right)^2; \quad \bar{u}_{0 \max} = u_{0 \max}/d. \quad (11)$$

С увеличением  $L/d$  возрастает сила  $\bar{N}$  в предельном состоянии, поскольку требуется удержать в равновесии большее число тел. При этом, как следует из выражения (10), цепочка гладких тел должна быть симметричной относительно середины расстояния между опорными телами. В противном случае устойчивость нарушается. Наиболее вероятна в предельном состоянии система с наименьшим расстоянием  $L = 2d$ , соответствующим вытеснению одного тела, так как при этом, согласно (11), сила  $\bar{N}$  имеет минимальное значение  $1/(2\bar{u}_{\max})$ , в точности совпадающее с линеаризованным решением динамического уравнения (2).

Определим вероятность нарушения равновесия системы тел сжатой силой  $N$ . Для тел со случайными значениями радиусов  $r_i$ , расположенных на неровной поверхности случайного профиля, углы  $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots$  в исходном состоянии равновесия (рис. 4) являются случайными величинами. Уравнения равновесия  $i$ -го тела имеют вид

$$\begin{cases} N_i \cos \alpha_i - N_{i+1} \cos \alpha_{i+1} = 0; \\ N_i \sin \alpha_i + N_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + N'_i - Q_i = 0. \end{cases}$$

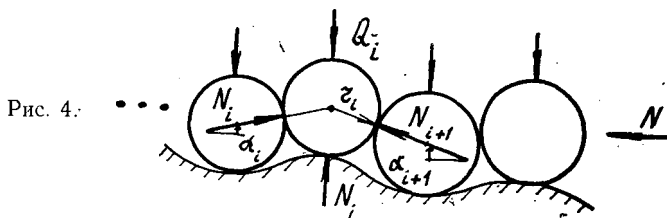


Рис. 4.

Считая, что вертикальная нагрузка  $Q_i$  для всех тел примерно одинакова и равна  $Q$ , находим

$$\begin{aligned} N_i \cos \alpha_i &= N_{i+1} \cos \alpha_{i+1} = N; \\ \bar{N}'_i &= N'_i/Q = 1 - \bar{N} (\operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg} \alpha_{i+1}). \end{aligned}$$

Условием предельного состояния (начала вытеснения  $i$ -го тела) является неравенство  $\bar{N}'_i \leq 0$ . Вероятность  $P_0$  выполнения этого условия вычислим по соотношению [2]

$$P_0 = P(\bar{N}'_i \leq 0) = \int f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) d\alpha_i d\alpha_{i+1}, \quad (12)$$

$$\varphi(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \leq 0$$

где  $f(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  — совместная плотность распределения случайных величин  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$ ;

$$\varphi(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1 - \bar{N} (\operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg} \alpha_{i+1}).$$

Считая, что  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  — независимые случайные величины, равновероятностные в некотором интервале  $(-\Delta, \Delta)$ , имеем  $f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1/(2\Delta)^2$ .

Значение угла  $\Delta$  (уровня возмущений) определяется параметрами распределения радиусов тел  $r_i$  и неровностей опорной поверхности.

Вычисление интеграла в выражении (12) значительно упрощается, если считать величину  $\Delta$  малой и  $\operatorname{tg} \alpha_i \approx \alpha_i, \operatorname{tg} \alpha_{i+1} \approx \alpha_{i+1}$ . В этом случае при  $\bar{N} \leq 1/(2\Delta)$   $P_0 = 0$ , при  $\bar{N} > 1/(2\Delta)$   $P_0 = \left(1 - \frac{1}{2\bar{N}\Delta}\right)^2/2$ .

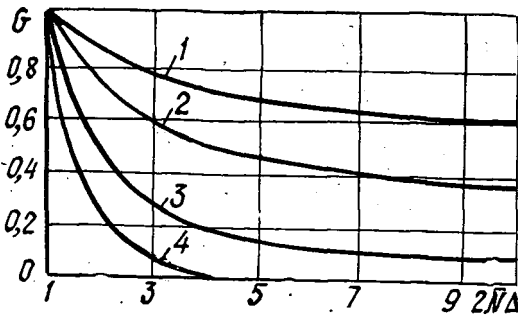


Рис. 5.

Вероятность того, что некоторое тело не будет вытеснено, равна  $G_0 = 1 - P_0$ , а вероятность того, что ни одно из  $n$  тел, сжатых силой  $\bar{N}$ , не будет вытеснено,  $G(\bar{N}) = G_0^n = (1 - P_0)^n$ . Тогда вероятность  $P$  нарушения равновесия системы  $P(\bar{N}) = 1 - G(\bar{N})$ .

На рис. 5 приведен график зависимости  $G(2\bar{N}\Delta)$  (кривые 1—4 соответствуют числу тел 1, 2, 5 и 10). Из него видно, что с увеличением числа тел  $n$  (длины цепочки) вероятность выдерживать большие сжимающие силы (несущая способность системы тел) быстро снижается.

Полученные результаты могут быть использованы при построении моделей взаимодействия рабочих органов лесных машин с круглыми лесоматериалами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Андронов В. В. О формировании пакета круглых лесоматериалов сжатием // Лесн. журн.—1975.—№ 2.—С. 59—64.—(Изв. высш. учеб. заведений). [2]. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.—М.: Наука, 1988.—480 с. [3]. Таубер Б. А. Грейферные механизмы.—М.: Машиностроение, 1985.—272 с. [4]. Труфанов А. А. Некоторые вопросы теории взаимодействия сплотовых машин и сплачиваемых пучков бревен: Автореф. дис.... канд. техн. наук.—Казань, 1957.—22 с. [5]. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.—М.: Наука, 1967.—376 с. [6]. Шимкович Д. Г. К определению усилий для разрушения «балок», образующихся при зачерпывании грейфером круглых лесоматериалов // Науч. тр. / МЛТИ.—М.: МЛТИ, 1987.—Вып. 197.—С. 22—36.

Поступила 5 ноября 1990 г.

УДК 624.072.233.5

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА НАГЕЛЯ В ДРЕВЕСИНЕ

В. П. СТУКОВ

Архангельский лесотехнический институт

Нагельные соединения элементов деревянных и комбинированных конструкций получили широкое распространение благодаря простоте и надежности в работе, а также возможности механизации технологических процессов их изготовления. Они могут быть выполнены из различных материалов напрягаемыми (тип 1) и ненапрягаемыми (тип 2) — рис. 1.

Нагель в древесине работает в сложном напряженно-деформированном состоянии. В общем случае его можно рассматривать как балку, лежащую на упругом основании и нагруженную на конце изгибающим моментом  $M_0$ , поперечной силой  $Q_0$  и растягивающей силой  $N_0$ .